فصل دوم

جبر خطی

ماتریس‌ها

منظور از یک ماتریس، تعدادی از اعداد هستند که در چند سطر و ستون مشخص قرار گرفته‌اند و وقتی می‌گوییم ماتریس $A_{m\times n}$، منظور ماتریسی است که دارای m سطر و n ستون می‌باشد و منظور از درایه یا عنصر a_{ij} عنصری (درایه‌ای) از این ماتریس است که در سطر i ام و ستون j ام واقع شده است.

ترانهاده ماتریس

منظور از ترانهاده ماتریس A که آن را با A' یا A^T نشان می‌دهند، ماتریسی است که برای مشخص کردن آن کافی است جای سطرها و ستون‌های ماتریس A را با هم عوض کنیم.

لذا طبیعی است که اگر A یک ماتریس $m\times n$ باشد، A' (ترانهاده ماتریس A) یک ماتریس $n\times m$ می‌باشد و البته داریم:

$$\boxed{A_{ij} = A'_{ji}}$$

جمع دو ماتریس

اعمال جمع و تفریق روی دو ماتریس زمانی امکان‌پذیر است که دو ماتریس هم‌مرتبه باشند (تعداد سطرها و ستون‌های دو ماتریس برابر باشد). در این حالت تک‌تک درایه‌های نظیر دو ماتریس را با هم جمع و یا از هم کم می‌کنیم.

$$\boxed{A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}}$$

ضرب عدد در ماتریس

اگر بخواهیم عدد حقیقی k را در ماتریس دلخواه A ضرب کنیم، لازم است این عدد را در تک‌تک درایه‌های ماتریس ضرب نماییم.

ضرب دو ماتریس

شرط لازم برای ضرب کردن دو ماتریس، آن است که شماره ستون ماتریس اول با شماره سطر ماتریس دوم برابر باشد:

$$\boxed{A_{i\times m}\cdot B_{m\times j}=C_{i\times j}}$$

و برای به‌دست آوردن درایه‌های ماتریس حاصل‌ضرب (C) از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\boxed{C_{ij}=\sum_{p=1}^{m}A_{ip}.B_{pj}}$$

نکته: اگر A , B , C سه ماتریس دلخواه باشند، در صورت انجام‌پذیر بودن اعمال گفته شده داریم:

$$(k.A)'=k.A' \qquad (A\pm B)'=A'\pm B'$$
$$(A.B)'=B'.A' \qquad (A')'=A$$
$$A.B\neq B.A \qquad A.(B.C)=(A.B).C$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$، مطلوب است به‌دست آوردن حاصلضرب $A.A'$.

$$A.A'=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(2)(2)+(-1)(-1) & (2)(1)+(-1)(3)\\ (1)(2)+(3)(-1) & (1)(1)+(3)(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -1\\ -1 & 10\end{bmatrix}$$

مثال: اگر A , B ماتریس‌های $n\times n$ متقارن باشند، در مورد ماتریس $A+B$ چه می‌توان گفت؟

حل: بدیهی است در مورد ماتریس متقارن داریم:

$$(A'=A)\ ,\ (B'=B)$$
$$(A+B)'=A'+B'=A+B$$

پس ماتریس $A+B$ نیز یک ماتریس متقارن است.

مثال: فرض کنید داشته باشیم $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix}$ و چنانچه تعریف کنیم $C=A\times B$، مطلوب است عضو واقع بر سطر دوم و ستون سوم از ماتریس C.

حل: طبیعی است که ما به دنبال C_{23} می‌باشیم لذا کافی است سطر دوم از ماتریس A را در ستون سوم از ماتریس B ضرب نماییم، بدین ترتیب به‌دست می‌آید:

$$A\times B=C\rightarrow\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{bmatrix}=2$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبه A^{50}.

حل: وقتی می‌خواهیم A^{50} را به‌دست آوریم لازم است ابتدا با چند ضرب متوالی، یک روال منطقی بیابیم و به یک حالت کلی تعمیم دهیم:

$$A^2=A.A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2.A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & -2\end{bmatrix}$$

اگر دقت کنید ملاحظه می‌شود که **اولین** عنصر سطر اول یکی بیشتر از توان است، دومین عنصر سطر اول قرینه توان، در اولین عنصر سطر دوم مانند **توان** و دومین عنصر سطر دوم، یک واحد کمتر از توان با علامت منفی می‌باشد پس لذا می‌توان گفت که:

$$A^{50}=\begin{bmatrix}51 & -50\\ 50 & -49\end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ باشد، مطلوب است محاسبه A^{100}:

حل: همانند مثال قبلی داریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ -3 & -2\end{bmatrix}$$

با استدلالی مشابه مثال قبل داریم:

$$A^{100}=\begin{bmatrix}101 & 100\\ -100 & -99\end{bmatrix}$$

ماتریس مربعی و ماتریس همانی:

ماتریس مربعی: یک ماتریس را مربعی گویند، هرگاه تعداد سطرها و ستونهای ماتریس با هم برابر باشند.

ماتریس همانی: یا ماتریس یکه، ماتریسی مربعی است که بجز اعضاء روی قطر اصلی ماتریس که برابر یک هستند سایر اعضاء صفر می‌باشند و با I نمایش می‌دهند.

$$I_{2\times 2}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

و البته در مورد این ماتریس‌ها داریم:

$$\boxed{A.I=I.A=A}$$

در مورد ماتریسهای مربعی مباحث زیر مطرح می‌شود:

تریس ماتریس

مجموع عناصر روی قطر اصلی یک ماتریس مربعی را تریس‌ماتریس گویند و با علامت TrA (تریس ماتریس A) نمایش می‌دهند. برای مثال اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ تعریف شده باشد داریم:

$$\boxed{Tr A=a+d}$$

دترمینان ماتریس

فرض کنید A یک ماتریس مربعی دلخواه باشد. همواره می‌توان عددی را به عنوان دترمینان ماتریس به صورت زیر تعریف کرد که آن را با نماد $|A|$ یا $\det A$ نشان می‌دهند.

برای ماتریسهای 2×2 مثل $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داریم:

$$\boxed{\det A = |A| = ad - bc}$$

برای ماتریس‌های مربعی مرتبه‌های بالاتر، می‌توان حاصل دترمینان را از طریق بسط دترمینان نسبت به یک سطر یا ستون دلخواه محاسبه نمود.

برای مثال برای ماتریس مربعی 3×3 مقابل داریم:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}_{3\times3}$$

بسط $|A|$ نسبت به سطر اول $= \det A = |A| = (-1)^{1+1}.a.\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.b.\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}.c.\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

بسط $|A|$ نسبت به ستون دوم $= \det A = |A| = (-1)^{1+2}.b.\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}.e.\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}.h.\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$

تذکر: توجه کنید علامتی که در بسط دترمینان ماتریس برای هر عضو لحاظ می‌گردد از طریق $(-1)^{i+j}$ به‌دست می‌آید که در آن i مبین سطر و j مبین ستون مربوط به آن عنصر می‌باشد.

تذکر: معمولاً علاقه‌مند هستیم که بسط دترمینان را نسبت به سطر یا ستونی انجام دهیم که در آن عناصر صفر بیشتری وجود دارد.

مثال: فرض کنید داشته باشیم $A=\begin{bmatrix} 2 & 3x \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$، x را طوری تعیین کنید که داشته باشیم: $\det A = \mathrm{Tr}A$.

حل: بدیهی است:

$$\left.\begin{array}{l} \det A = 8+3x \\ \mathrm{Tr}\,A = 6 \end{array}\right\} \to 8+3x=6 \to x=\frac{-2}{3}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبه دترمینان A.

حل: ملاحظه می‌شود که بیشترین عنصر صفر (0) در سطر سوم ماتریس دیده می‌شود لذا بسط دترمینان را نسبت به سطر سوم انجام می‌دهیم.

$$\det(A) = -3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\left[2(6-4)-3(9-4)+1(3-2)\right] = 30$$

مثال: مطلوب است محاسبه x از حل دترمینان زیر:

$$\begin{vmatrix} 2x & -1 & 3 \\ x & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

حل: با بسط دترمینان مذکور حول سطر اول داریم:

$$2x\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

$$-2x + x - 1 + 9x - 6 = 11$$

$$8x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{8}$$

مثال: مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$ چه مقدار می‌باشد؟

حل: با بسط دترمینان حول سطر اول داریم:

$$2\cos\theta\left(4\cos^2\theta - 1\right) - 1(2\cos\theta - 0) = 4\cos\theta\left(2\cos^2\theta - 1\right) = 4\cos\theta\cos 2\theta = \frac{4\cos\theta\sin\theta\cos 2\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{2\sin 2\theta\cos 2\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin 4\theta}{\sin\theta}$$

چند خاصیت دترمینان

تذکر: چنانچه تمام درایه‌های یک سطر و یا یک ستون ماتریسی برابر صفر باشد، دترمینان آن ماتریس برابر صفر می‌باشد.

تذکر: دترمینان یک ماتریس بالا مثلثی یا پایین مثلثی، برابراست با حاصل‌ضرب عناصر قطر اصلی. (توجه: یک ماتریس مربعی را زمانی از نوع مثلثی می‌گویند که تمام درایه‌های بالای قطر اصلی و یا تمام درایه‌های پایین قطر اصلی صفر باشد).

مثال: مطلوب است محاسبه دترمینان ماتریس مقابل:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

حل: از آنجاکه ماتریس مذکور از نوع بالا مثلثی می‌باشد، دترمینان ماتریس A به صورت زیر خواهد بود:

$$\det(A) = |A| = 1\times 2\times 1\times 3 = 6$$

چند تذکر:

۱ـ چنانچه دو سطر یک ماتریس با هم یکسان و یا دو ستون ماتریس با هم یکسان باشد، دترمینان ماتریس صفر می‌باشد.
۲ـ چنانچه یک سطر ماتریسی k برابر سطر دیگر و یا یک ستون ماتریسی k برابر ستون دیگر باشد، دترمینان ماتریس برابر صفر است.
۳ـ چنانچه k برابر یک سطر ماتریسی با L برابر سطر دیگر این ماتریس جمع شده باشد و حاصل در سطر دیگری از ماتریس نوشته شده باشد، دترمینان ماتریس برابر صفر است (این موضوع برای ستون‌ها نیز صدق می‌کند).
۴ـ اگر یک سطر و یا یک ستون ماتریسی را در عدد k ضرب کنیم، دترمینان حاصله k برابر دترمینان ماتریس اولیه خواهد بود.

۵ـ فرض کنید A , B دو ماتریس مربعی $k, n\times n$ یک عدد حقیقی و p یک عدد طبیعی باشد می‌توان نشان داد:

$$\boxed{\begin{aligned} &|A'| = |A| \\ &|A.B| = |A|.|B| \\ &|A^p| = |A|^p \\ &|k.A| = k^n|A| \end{aligned}}$$

مثال: مطلوب است محاسبه دترمینان ماتریسهای زیر:

$$\text{I)} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حل: با کمی دقت ملاحظه می‌شود مجموع سطر اول و دوم ماتریس در سطر سوم آن نوشته شده است بنابراین $|A| = 0$ است.

$$\text{II)} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & -6 & -8 \end{bmatrix}$$

حل: به‌وضوح می‌بینیم از ضرب سطر اول ماتریس در عدد 2- دقیقاً سطر چهارم حاصل می‌شود بنابراین $|B| = 0$ است.

مثال: فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ چنانچه $C = A'^3.4B.B^5$، مطلوب است محاسبه دترمینان C .

حل:

$$|A| = 2\times5 - 3\times4 = -2 = |A'|$$
$$|B| = 3\times3 - 2\times5 = -1 = |B'|$$
$$|C| = |A'^3.4B.B^5| = |A'^3|.|4B|.|B^5| = |A'|^3.4^2|B|.|B|^5 = -2^3\times4^2\times(-1)(-1)^5 = -2^3\times4^2 = -128$$

دترمینان کهاد و همسازه:

فرض کنید A یک ماتریس مربعی باشد، در این صورت برای هر کدام از عناصر این ماتریس می‌توان یک دترمینان کهاد و یک همسازه تعریف کرد.

دترمینان کهاد عنصر a_{ij}: دترمینان حاصل از حذف سطر iام و ستون j ام از ماتریس A را دترمینان کهاد عنصر a_{ij} گویند که با علامت Δ_{ij} مشخص می‌شود.

همسازه عنصر a_{ij} از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{a_{ij} \text{ همسازه عنصر} = N_{ij} = (-1)^{i+j}.\Delta_{ij}}$$

ماتریس همسازه‌ها و ماتریس الحاقی (وابسته)

اگر A یک ماتریس مربعی باشد و ما تمام همسازه‌های آن را یافته باشیم، چنانچه این همسازه‌ها را به ترتیب درون ماتریسی بچینیم به ماتریس حاصله، ماتریس همسازه‌های A گویند و آن را با N نمایش می‌دهند و به ترانهاده آن یعنی N' ماتریس الحاقی ماتریس A می‌گویند و گاهی با علامت $\mathrm{adj}(A)$ و یا A^* نیز نمایش می‌دهند.

با توجه به موارد فوق بدیهی است که داریم:

$$\boxed{N'_{ij} = N_{ji}}$$

اگر ماتریس A به صورت $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ باشد نخست همسازه‌های ماتریس را به‌دست می‌آوریم. برای مثال داریم:

$$N_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} \qquad N_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$$

$$N_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \qquad N_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}$$

و به همین ترتیب، سایر همسازه‌های ماتریس را به‌دست می‌آوریم. حال ماتریس N (ماتریس همسازه‌ها) را به‌صورت زیر مشخص می‌کنیم:

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{bmatrix}$$

با ترانهاده نمودن ماتریس N و ماتریس الحاقی یا N' به‌دست می‌آید:

$$N' = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{21} & N_{31} \\ N_{12} & N_{22} & N_{32} \\ N_{13} & N_{23} & N_{33} \end{bmatrix}$$

مثال: فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ درایه واقع بر سطر دوم ستون سوم از ماتریس الحاقی این ماتریس را به‌دست آورید.

حل: بدیهی است درایه واقع بر سطر دوم، ستون سوم از ماتریس الحاقی همان درایه سطر سوم و ستون دوم ماتریس همسازه می‌باشد پس داریم:

$$N'_{23} = N_{32}$$

$$N_{32} = (-1)^{3+2} . \Delta_{32} = (-1).\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(6-4) = -2$$

معکوس یک ماتریس مربعی

اگر A یک ماتریس مربعی غیر منفرد باشد (یعنی $|A| \neq 0$)، آنگاه معکوس‌پذیر است. یعنی می‌توان ماتریسی مانند A^{-1} پیدا کرد به‌طوری‌که $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$ که در این رابطه A^{-1} را معکوس ماتریس A گویند و برای پیدا کردن آن می‌توان نوشت:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{N'}{|A|}}$$

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $ad-bc\neq 0$ $(|A|\neq 0)$ باشد آنگاه معکوس ماتریس A را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$A^{-1}=\frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{ad-bc}$$

نکته: اگر A,B دو ماتریس مربعی $n\times n$ و p یک عدد طبیعی و k یک عدد حقیقی باشد داریم:

$$\left(A^{-1}\right)'=\left(A'\right)^{-1} \qquad (kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$$

$$\left(A^{-1}\right)^{p}=\left(A^{p}\right)^{-1} \qquad (A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$$

$$\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ مطلوب است درایه واقع بر سطر اول ستون دوم از ماتریس معکوس A .

حل: می‌دانیم $A^{-1}=\frac{N'}{|A|}$. با توجه به استدلال‌های قبلی می‌دانیم:

$$A^{-1}_{12}=\frac{N'_{12}}{|A|}=\frac{N_{21}}{|A|}$$

بسط دترمینان حول سطر اول:

$$|A|=2(-2-1)-1(-3-5)=2$$

حال می‌نویسیم:

$$N_{21}=(-1)^{2+1}\Delta_{21}=(-1).\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=1$$

$$A^{-1}_{12}=\frac{1}{2}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ مطلوب است مجموع عناصر روی قطر اصلی معکوس این ماتریس.

حل: به‌واسطه مثلثی بودن ماتریس داریم:

$$|A|=2\times 4\times(-1)=-8$$

$$A^{-1}_{11}+A^{-1}_{22}+A^{-1}_{33}=\frac{N'_{11}}{|A|}+\frac{N'_{22}}{|A|}+\frac{N'_{33}}{|A|}=\frac{N_{11}+N_{22}+N_{33}}{|A|}=\frac{(-1)^{1+1}\Delta_{11}+(-1)^{2+2}\Delta_{22}+(-1)^{3+3}\Delta_{33}}{|A|}=\frac{-1}{4}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $\left|A^3\right| = 27$ و چنانچه A یک ماتریس مربعی 5×5 باشد مطلوب است محاسبه دترمینان $\frac{1}{2}A^{-1}$.

حل:

$$\left|A^3\right| = |A|^3 = 27 \Rightarrow |A| = 3$$

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{3}$$

از طرفی بدیهی است چون A یک ماتریس 5×5 است، A^{-1} نیز یک ماتریس 5×5 است پس می‌توان نوشت:

$$\left|\frac{1}{2}A^{-1}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2^5}$$

مثال: اگر A یک ماتریس مربعی 5×5 باشد و بدانیم دترمینان آن برابر 6 می‌باشد، مطلوب است محاسبه دترمینان ماتریس الحاقی آن:

حل: می‌دانیم:

$$A^{-1} = \frac{N'}{|A|} \Rightarrow |A|\,A^{-1} = N'$$

از طرفی داریم:

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{6}$$

از آنجا که می‌دانیم هرگاه یک سطر ماتریس را در عدد k ضرب کنیم، دترمینان حاصله k برابر دترمینان ماتریس اصلی می‌شود و با توجه به اینکه ماتریس $|A|A^{-1}$، همان ماتریس A^{-1} است که تمام درایه های آن در $|A|$ ضرب شده است می‌توان نوشت:

$$\left||A|A^{-1}\right| = |N'| = 6^5 \times \frac{1}{6} = 6^4$$

مثال: اگر A یک ماتریس حقیقی $n\times n$ و k یک عدد حقیقی باشد، آنگاه $\mathrm{adj}(kA)$. برابر کدام‌یک از گزینه‌های زیر است: ($\mathrm{adj}A$ ماتریس الحاقی A می‌باشد).

الف) $k^{n-1}\,\mathrm{adj}A$ ب) $k^n\,\mathrm{adj}A$ ج) $k\,\mathrm{adj}A$ د) $\mathrm{adj}A$

حل: با فرض وارون پذیر بودن A می‌توان نوشت:

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\,A}{|A|} \Rightarrow \mathrm{adj}\,A = |A|\,A^{-1}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\mathrm{adj}(kA) = |kA|(kA)^{-1}$$

چون ماتریس A یک ماتریس $n\times n$ است لذا خواهیم داشت:

$$|kA| = k^n|A|$$

از طرفی چون $k\in R$ است با مراجعه به خواص ماتریس می‌دانیم که $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ در نتیجه داریم:

$$\mathrm{adj}\,(kA) = k^n|A|\,k^{-1}A^{-1} = k^{n-1}|A|\left|A^{-1}\right| = k^{n-1}\,\mathrm{adj}(A)$$

ماتریس متعامد

ماتریس مربعی A را متعامد گویند هرگاه $A' = A^{-1}$ باشد و البته در این حالت خواهیم داشت: $|A| = \pm 1$

مثال: اگر A , B دو ماتریس $n\times n$ متعامد باشند و داشته باشیم: $|A|+|B|=0$ مطلوب است محاسبه: $|A+B|$.

حل: با توجه به اینکه ماتریسهای A , B متعامد هستند داریم: $A^{-1}=A'$, $B^{-1}=B'$

لذا می‌توان نوشت:

$$A+B = A\left(I+A^{-1}B\right) = A\left(I+A'B\right) = A\left(B^{-1}+A'\right)B = A\left(B'+A'\right)B = A\left(A+B\right)'B$$

$$|A+B| = \left|A\left(A+B\right)'B\right| = |A|\left|\left(A+B\right)'\right||B|$$

با توجه به فرض مساله داریم $|A| = -|B|$ پس می توان نوشت:

$$|A+B| = -\left(|A|\right)^2 |A+B|$$

در نتیجه داریم: $|A+B| = 0$

مقادیر ویژه یک ماتریس مربعی

تعریف: در ماتریس مربعی $An\times n$ اگر بتوان مقادیر λ را به گونه‌ای تعیین نمود که داشته باشیم: $\boxed{AX=\lambda X}$ که در آن X یک ماتریس $n\times 1$ است، آنگاه λ های به‌دست آمده را مقادیر ویژه ماتریس A , X را بردار ویژه متناظر با این مقادیر ویژه می‌گوییم:

برای محاسبه مقادیر ویژه کافی است که معادله مشخصه ماتریس A را که به فرم زیر نوشته می‌شود را حل نماییم:

$$\boxed{\det\left(A-\lambda I\right)=0}$$

برای مثال برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ معادله مشخصه به‌صورت زیر که از حل آن مقادیر ویژه ماتریس A به‌دست می‌آید:

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & e-\lambda & f \\ g & h & i-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det\left(A-\lambda I\right) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & e-\lambda & f \\ g & h & i-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

از حل معادله فوق سه مقدار ویژه برای ماتریس A حاصل می‌شود و با حل معادله $\left(A-\lambda I\right)X=0$ بردار X (بردار ویژه متناظر با مقادیر ویژه λ) به‌دست می‌آید.

مقادیر ویژه و نیز بردارهای ویژه دارای کاربردهای زیادی در علوم مختلف هستند که صحبت در مورد آنها از حوصله این مبحث خارج است.

مثال: مقادیر ویژه ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & -2\end{bmatrix}$$

حل: معادله مشخصه ماتریس چنین است:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 4\\ 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (3-\lambda)(-2-\lambda)-16=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda-22=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1\pm\sqrt{1+4(22)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{89}}{2}$$

λ_1,λ_2 مقادیر ویژه ماتریس هستند:

$$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{89}}{2}$$

$$\lambda_2=\frac{1-\sqrt{89}}{2}$$

مثال: مقادیر ویژه ماتریس زیر چقدر است؟

$$B=\begin{bmatrix}13 & -3 & 5\\ 0 & 4 & 0\\ -15 & 9 & -7\end{bmatrix}$$

حل: معادله مشخصه ماتریس چنین است:

$$\begin{vmatrix}13-\lambda & -3 & 5\\ 0 & 4-\lambda & 0\\ -15 & 9 & -7-\lambda\end{vmatrix}=0$$

با بسط این دترمینان حول سطر دوم داریم:

$$(4-\lambda)\{(13-\lambda)(-7-\lambda)+(5)(15)\}=0 \Rightarrow (4-\lambda)\{-91-13\lambda+7\lambda+\lambda^2+75\}=0 \Rightarrow (4-\lambda)(\lambda^2-6\lambda-16)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4-\lambda=0\Rightarrow\lambda=4\\ \lambda^2-6\lambda-16=0\Rightarrow\lambda=8\,,\,-2\end{cases}$$

مثال: مقدار a چقدر باشد تا یکی از مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$ برابر $\lambda=3$ باشد. بردار ویژه نظیر این مقدار ویژه را تعیین کنید.

حل: با توجه به رابطه $\det(A-\lambda I)=0$ داریم: (در اینجا $\lambda=3$ می‌باشد)

$$\begin{vmatrix}a-3 & 0 & 1\\ 2 & 1-3 & 0\\ 1 & 2 & 2-3\end{vmatrix}=0\Rightarrow(a-3)\{(2-0)\}-(0)+(1)\{(4+2)\}=0\Rightarrow a=0$$

برای یافتن بردار ویژه نظیر $\lambda=3$ داریم:

$$(A-3I).X=0$$

$$\begin{bmatrix}-3 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

از حل **معادله** ماتریسی فوق داریم:

$$\begin{cases} -3x+z=0 \rightarrow z=3x \\ 2x-2y=0 \rightarrow y=x \\ x+2y-z=0 \rightarrow x+2x-3x=0 \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که سه معادله وابستگی خطی دارند. در نتیجه داریم:

$$X=\begin{bmatrix} x \\ x \\ 3x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

نکته مهم:

فرض کنید A یک ماتریس مربعی 3×3 باشد که مقادیر ویژه آن λ_1 , λ_2 , λ_3 است. همواره داریم:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{Tr}(A)$$
$$\lambda_1\times\lambda_2\times\lambda_3=\det(A)$$
$$\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3=\frac{1}{2}\left\{(\mathrm{Tr}A)^2-\left(\mathrm{Tr}A^2\right)\right\}$$

مثال: فرض کنید $A=\begin{bmatrix} 13 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -15 & 9 & -7 \end{bmatrix}$ مقادیر ویژه این ماتریس کدام است؟

الف) $4,-8,2$ ب) $-4 , 8 , 2$ ج) $-4 , 8 , -2$ د) $4 , 8 , -2$

حل: بدون نیاز به حل معادله مشخصه، با توجه به نکات بالا داریم:

$$\mathrm{Tr}(A)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$$
$$\mathrm{Tr}(A)=13+4+(-7)=10$$

بنابراین با توجه به گزینه‌ها ملاحظه می‌شود، تنها گزینه‌ای که رابطه بالا را ارضا می‌کند گزینه (د) می‌باشد.

مثال: مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix} -14 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ کدام‌اند؟

الف) $2 , 14$ ب) $-2 , 1$ ج) $2 , -14$ د) $2 , 15$

حل: اگر چه می‌توان با تشکیل معادله مشخصه مقادیر ویژه را محاسبه کرد اما راه‌حل ساده مساله چنین است:
ماتریس A یک ماتریس مربعی 3×3 می‌باشد بنابراین باید 3 مقدار ویژه داشته باشد وقتی به گزینه‌ها نگاه می‌کنیم در تمام گزینه‌ها فقط دو عدد نوشته شده است. بنابراین، بدیهی است که در هر گزینه یکی از اعداد تکراری می‌باشد و با توجه به این مطلب که داریم:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{Tr}(A)=(-14+2+2)=-10$$

می‌توان گزینه‌ها را به طور جداگانه آزمایش کرد به‌عنوان مثال گزینه (الف) می‌تواند دو مقدار ویژه را 2 و یکی را 14 یا دو مقدار ویژه را 14 و یکی را 2 توصیف کند. لذا با این منطق تنها گزینه (ج) می‌تواند صحیح باشد: $\lambda_1=\lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=-14$

1

مثال: ماتریس زیر را در نظر بگیرید. $A=\begin{bmatrix}5 & 1 & *\\ -3 & 6 & 2\\ 1 & -4 & 1\end{bmatrix}$ چنانچه یکی از مقادیر ویژه ماتریس $\lambda=2$ باشد و بدانیم $|A|=42$ است، دو مقدار ویژه دیگر ماتریس را به‌دست آورید.

حل: می‌دانیم $\lambda_1=2$ با استفاده از نکاتی که قبلاً ذکر شد داریم:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{Tr}(A)\Rightarrow 2+\lambda_2+\lambda_3=6+5+1\Rightarrow \lambda_2+\lambda_3=10$$
$$\lambda_1\times\lambda_2\times\lambda_3=\det(A)\Rightarrow 2\lambda_2\lambda_3=42\Rightarrow \lambda_2\lambda_3=21$$

از حل دو معادله فوق به‌دست می‌آید: $\lambda_3=3\ ,\ \lambda_2=7$

مثال: بردارهای ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

حل: با حل معادله مشخصه داریم:

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow \lambda^2-7\lambda+6=0\Rightarrow \lambda_1=1\ ,\ \lambda_2=6$$

برای به‌دست آوردن بردار ویژه نظیر مقدار ویژه $\lambda_1=1$ داریم:

$$\lambda_1=1\Rightarrow (A-(1)I).X=0\Rightarrow \begin{bmatrix}4 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{cases}4x+4y=0\\ x+y=0\end{cases}\Rightarrow x=-y\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

و نیز برای به‌دست آوردن بردار ویژه نظیر مقدار ویژه $\lambda_2=6$ داریم:

$$\lambda_2=6\Rightarrow (A-6I).X=0\Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 4\\ 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=0$$
$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}-x+4y=0\\ x-4y=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=+4y\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix}$$

مثال: مطلوب است مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

الف) $\lambda_1=e^{2i\theta}\ ,\ \lambda_2=e^{-2i\theta}$

ب) $\lambda_1=\lambda_2=e^{i\theta}$

ج) $\lambda_1=e^{i\theta}\ ,\ \lambda_2=e^{2i\theta}$

د) $\lambda_1=e^{i\theta}\ ,\ \lambda_2=e^{-i\theta}$

حل: با حل معادله مشخصه داریم:

$$\det(A-\lambda I)=0\Rightarrow \begin{vmatrix}\cos\theta-\lambda & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow \lambda^2-2\cos\theta(\lambda)+1=0\Rightarrow \lambda=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}=\cos\theta\pm i\sin\theta$$

با توجه به این نکته که می‌دانیم $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ می‌توان نوشت:

$$\lambda_1=e^{i\theta}$$
$$\lambda_2=e^{-i\theta}$$

توجه به نکات زیر در حل تست‌ها می‌تواند مفید باشد:

نکته: یک ماتریس مربعی $n\times n$ دارای n مقدار ویژه می‌باشد که البته ممکن است تعدادی از این مقادیر ویژه، تکراری باشند.

نکته: اگر مقادیر ویژه ماتریسی به‌گونه‌ای باشند که یکی از آنها صفر باشد، واضح است دترمینان آن ماتریس صفر است و لذا ماتریس موردنظر معکوس‌پذیر نمی‌باشد.

هرگاه دو مقدار ویژه یک ماتریس یکسان باشد، دلیلی ندارد که بردارهای ویژه متناظر با این دو مقدار نیز یکسان باشند.

بردارهای ویژه وابسته به مقدار ویژه متمایز، مستقل از یکدیگرند.

- تعداد بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه λ بی شمار است.
- مقادیر ویژه A^T, A یکسان است.
- اگر ماتریس A نامنفرد باشد مقادیر ویژه A^{-1}، عکس مقادیر ویژه A می‌باشند.
- اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد، آنگاه λ^n یک مقدار ویژه ماتریس A^n است.

مثال: اگر ماتریس $A_{4\times4}$ دارای مقادیر ویژه 1- , 1 , 0 , 2 باشد در مورد ماتریس معکوس $A\ \left(A^{-1}\right)$ چه می‌توان گفت؟

حل: با توجه به نکات گفته شده، ماتریس مزبور دارای مقدار ویژه صفر می‌باشد. لذا $\det A = 0$ است پس ماتریس مذکور، معکوس‌پذیر نمی‌باشد.

مثال: اگر A یک ماتریس 3×3 با مقادیر ویژه 3 , 2 , 1 باشد مقادیر ویژه ماتریس $B = 2A - I$ کدام‌اند؟

الف) 0 , 1 , 2 ب) 2 , 4 , 6 ج) 1 , 3 , 5 د) 1 , -3 , -5

حل: می‌دانیم ماتریس $2A$ همان ماتریس A است که درایه‌های آن در عدد 2 ضرب شده است. لذا بدیهی است که:

$$\mathrm{Tr}(2A) = 2\mathrm{Tr}(A)$$

و نیز داریم:

$$\mathrm{Tr}(I) = 3 \qquad , \quad \mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت:

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(2A) - \mathrm{Tr}(I) = 12 - 3 = 9$$

پس مجموع مقادیر ویژه ماتریس B باید معادل 9 باشد و تنها جواب قابل قبول گزینه (ج) می‌باشد.

توجه: البته از آن‌جا که از رابطه $B = 2A - I$ می‌توان نتیجه گرفت: $\lambda_B = 2\lambda_A - 1$ نیز می‌توان صحت گزینه ج را دید.

تعیین رتبه یا رنک یک ماتریس (Rank)

تعریف: رتبه یک ماتریس $A_{m\times n}$ برابر k است، هرگاه بزرگترین ماتریس مربعی با دترمینان غیرصفر که از داخل این ماتریس می‌توان استخراج کرد از مرتبه k باشد. به تعبیر دیگر رتبه یک ماتریس برابر است با حداقل تعداد سطرهای مستقل خطی و تعداد ستون‌های مستقل خطی موجود در آن ماتریس (معمولاً رتبه یک ماتریس را با تلفیق این دو جمله پیدا می‌کنیم).

مثال: رتبه ماتریس زیر را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حل: بدیهی است از آنجا که ماتریس موردنظر یک ماتریس 3×4 می‌باشد، بنابراین رتبه آن 4 نخواهد بود. از طرفی همانطور که ملاحظه می‌شود، تمام ماتریس‌های 3×3 قابل استخراج از داخل این ماتریس دارای دترمینان صفر می‌باشند (همگی یک سطر با

درایه‌های صفر دارند). لذا رتبه ماتریس 3 نخواهد بود.

از طرفی، تمام دترمینان مربعی 2×2 که از داخل این ماتریس می‌توان استخراج کرد برابر صفراند. بنابراین رتبه ماتریس 2 نخواهد بود.

از آنجاکه لااقل یک عدد غیرصفر در این ماتریس وجود دارد لذا رتبه ماتریس موردنظر برابر 1 است.

مثال: رتبه ماتریس زیر را پیدا کنید.

$$A\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

حل: با کمی دقت ملاحظه می‌شود که تعداد سطرهای مستقل خطی در این ماتریس دو می‌باشد. یعنی سطرهای اول و دوم مستقل‌اند. و نیز داریم:

سطر دوم + سطر اول = سطر سوم

سطر سوم + سطر اول = سطر چهارم

بنابراین، نمی‌توان یک دترمینان مربعی 3×3 از داخل ماتریس استخراج کرد که مخالف صفر باشد.

حال این سوال مطرح است که آیا می‌توان لااقل یک دترمینان 2×2 مخالف صفر از داخل ماتریس A استخراج کرد؟ با کمی دقت، وجود لااقل یک دترمینان 2×2 مخالف صفر به‌سادگی قابل رؤیت است.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

لذا رتبه ماتریس A برابر 2 می‌باشد:

$$\text{Rank } A = 2$$

مثال: ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض است. مقدار a چقدر باشد تا رتبه این ماتریس برابر 3 نباشد و سپس تعیین کنید در این حالت رتبه ماتریس چند است؟

حل: ماتریس موردنظر ما یک ماتریس 3×3 است. طبیعی است اگر قرار است رتبه آن 3 نباشد، باید دترمینان آن برابر صفر شده باشد. پس داریم:

$$|A| = 0 \Rightarrow 2(-4-0) + 1(8-3) + a(0+2) = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

پس ماتریس مذکور به صورت $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{3}{2} \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ خواهد بود.

حال باید ببینیم آیا لااقل یک دترمینان 2×2 مخالف صفر در این ماتریس قابل رؤیت است؟ با کمی دقت ملاحظه می‌شود:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

پس رتبه ماتریس مذکور 2 است.

$$\text{Rank } A = 2$$

فصل سوم

هندسه تحلیلی

مقدمه‌ای از مبحث بردارها

دو نقطه A به مختصات $A(x_1,y_1,z_1)$ و B به مختصات $B(x_2,y_2,z_2)$ را در فضا در نظر بگیرید. بردار $\overrightarrow{AB}$ در مختصات دکارتی به صورت زیر قابل تعریف است:

$$\boxed{\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}}$$

که در آن $\vec{k},\vec{j},\vec{i}$ به ترتیب بردارهای یکه سه محور z,y,x هستند و طول بردار $\overrightarrow{AB}$ فاصله مستقیم دو نقطه A , B می‌باشد که از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

و همچنین مختصات نقطه M به گونه‌ای که پاره‌خط AB را به نسبت λ تقسیم کند به صورت زیر معین می‌گردد:

$$\boxed{\begin{aligned}x_m&=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ y_m&=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\\ z_m&=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\end{aligned}}$$

تعریف:

۱ـ اندازه بردار $\vec{u}(a,b,c)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

۲ـ بردار یکه بردار $\vec{u}(a,b,c)$، برداری است که امتداد و جهت آن مانند بردار $\vec{u}$ است ولی طول آن واحد است و آن را با $\vec{\lambda}_u$ نشان می‌دهند و به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{\vec{\lambda}_u=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

مثال: دو نقطه A , B با مختصات زیر مفروض است. مطلوب است بردار یکه متناظر با بردار $\overrightarrow{AB}$.

$B(3,0,2)\ ,\ A(2,1,-3)$

حل : طبق تعاریف بالا ابتدا بردار $\overrightarrow{AB}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{AB}=(3-2\ ,0-1,2+3)=(1,-1,5)$$

طول بردار $\overrightarrow{AB}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(5)^2}=\sqrt{27}$$

بردار یکه $\overrightarrow{AB}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{\lambda}_{AB}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}}{\sqrt{27}}=\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)\vec{i}-\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)\vec{j}+\left(\frac{5}{\sqrt{27}}\right)\vec{k}$$

کسینوس‌های هادی یک بردار

بردار $\vec{A}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ با محورهای x , y , z به ترتیب زوایای γ,β,α می‌سازد که کسینوس‌های این زوایا (کسینوس‌های هادی بردار) را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{a}{|\vec{A}|}\qquad \cos\beta=\frac{b}{|\vec{A}|}\qquad \cos\gamma=\frac{c}{|\vec{A}|}}$$

و همواره داریم:

$$\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1}$$

ـ انواع ضرب بردارها:

ضرب عدد در بردار: بردار $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ و عدد حقیقی k را در نظر بگیرید حاصلضرب عدد در بردار، برداری است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k\vec{u}=(ka)\vec{i}+(kb)\vec{j}+(kc)\vec{k}$$

ضرب داخلی دو بردار (ضرب اسکالر)

دو بردار $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$, $\vec{v}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ را در نظر بگیرید. حاصلضرب داخلی دو بردار، عددی است که به یکی از دو صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{u}.\vec{v}=am+bn+cp\\ \vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta\end{array}}$$

که در رابطه بالا θ زاویه بین دو بردار است.

نکته: با دقت به دو رابطه نوشته شده، می‌توان زاویه بین دو بردار $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$, $\vec{v}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ را با توجه به فرمول زیر محاسبه کرد:

$$\boxed{\cos\theta=\frac{am+bn+cp}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}}$$

لذا طبیعی است که شرط عمود بودن دو بردار بر هم، آن است که $\vec{u}.\vec{v}=$ $am+bn+cp=$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود ضرب داخلی دو بردار دارای خاصیت جابجایی بوده و داریم: $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

نکته: دو بردار $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$, $\vec{v}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ را در نظر بگیرید به‌سادگی می‌توان نشان داد:

الف) تصویر بردار $\vec{A}$ روی بردار $\vec{B}$ عبارت است از: $\vec{A}_B=\left(\vec{A}.\vec{\lambda}_B\right)\vec{\lambda}_B$

(که در آن $\vec{\lambda}_B$ بردار یکه $\vec{B}$ می‌باشد)

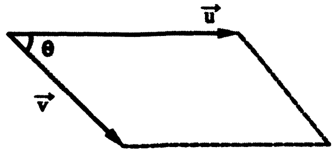
ب) قرینه بردار $\vec{A}$ نسبت به بردار $\vec{B}$ عبارت است از: $\vec{A}'_B=2\vec{A}_B-\vec{A}$

ضرب خارجی دو بردار (ضرب برداری)

دو بردار $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$, $\vec{v}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ را در نظر بگیرید. حاصلضرب خارجی دو بردار برداری است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a & b & c\\ m & n & p\end{vmatrix}}$$

نکته: از حاصلضرب خارجی دو بردار، برداری حاصل می‌شود که دو ویژگی مهم دارد.



اگر فرض کنیم $\vec{N}=\vec{u}\times\vec{v}$ پس می‌توان گفت:

۱) بردار $\vec{N}$ بر هر دو بردار $\vec{u},\vec{v}$ عمود است.

۲) اندازه بردار $\vec{N}$ برابر مساحت متوازی‌الاضلاعی است که می‌توان بر روی دو بردار $\vec{u},\vec{v}$ بنا کرد (یعنی به عبارتی دیگر، مساحت متوازی‌الاضلاع همان طول بردار حاصلضرب خارجی دو بردار سازنده آن می‌باشد).

$$\text{مساحت متوازی‌الاضلاع}=\left|\vec{N}\right|=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\sin\theta$$

۳) ضرب خارجی دو بردار دارای خاصیت جابه‌جایی نمی‌باشد: $\vec{u}\times\vec{v}=-\left(\vec{v}\times\vec{u}\right)$

حاصل ضرب مختلط سه بردار:

بردارهای $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$, $\vec{v}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ و $\vec{\omega}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$ را در نظر بگیرید. حاصل‌ضرب مختلط این سه بردار، برداری است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}}$$

توجه داشته باشید قدرمطلق حاصل‌ضرب مختلط این سه بردار، حجم متوازی‌الاسطوحی است که بر روی این سه بـردار، قابـل سـاختن است. لذا طبیعی است که اگر حاصل‌ضرب مختلط سه بردار برابر صفر باشد، آن سه بردار در یک صفحه واقع هستند. پـس بـرای چـک کردن هم صفحه بودن سه بردار می‌توان از این مفهوم استفاده کرد.

وابستگی خطی و استقلال خطی در بردارها

تعریـف: بردارهای $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ را وابسته خطی گویند هرگاه اعداد ثابتی مانند $k_1, k_2, ..., k_n$ (که همگی همزمان صفر نمی‌باشند) یافت شود به گونه‌ای که:

$$k_1\vec{u}_1+k_2\vec{u}_2+k_3\vec{u}_3+...+k_n\vec{u}_n=0$$

در غیر این صورت بردارهای مزبور را مستقل خطی گویند.

نکته: ثابت می‌شود در یک فضای n بعدی، هر $n+1$ بردار قطعاً وابستگی خطی دارند.

نکته: با استفاده از تعریف فوق، می‌توان گفت دو بردار $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$, $\vec{v}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ را دارای وابستگی خطی می‌گویند هرگاه بتوان عدد ثابتی مانند ℓ پیدا کرد به‌طوری‌که $\vec{v}=\ell\vec{u}$. در یک بیان متناظر دو بردار $\vec{u}, \vec{v}$ دارای وابستگی خطی گویند، هرگاه با هم موازی باشند و به تعبیری هرگاه داشته باشیم:

$$\boxed{\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}}$$

و در غیر این صورت دارای استقلال خطی هستند.

نکته: سه بردار $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$, $\vec{v}=m\vec{i}+n\vec{j}+c\vec{k}$ و $\vec{w}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$ را دارای وابستگی خطی گویند، هرگاه بتوان اعداد ℓ_1, ℓ_2 را به‌گونه‌ای یافت که داشته باشیم: $\vec{w}=\ell_1\vec{u}+\ell_2\vec{v}$

و می‌توان ثابت کرد شرط وابستگی خطی داشتن سه بردار، آن است که ضرب مختلط آنها برابر صفر شود:

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}=0}$$

وضعیت دو بردار نسبت به هم

دو بردار $\bar{u}(a,b,c)$, $\bar{v}(m,n,p)$ را در نظر بگیرید:

شرط عمود بودن دو بردار: $am+bn+cp=0$

شرط موازی بودن دو بردار: $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}$

مثال: دو نقطه $A(1,2,3)$, $B(-1,3,3)$ مفروض می‌باشند. نقطه m را بر پاره‌خط AB به گونه‌ای بیابید که این پاره‌خط را به نسبت $\lambda=3$ تقسیم کند.

حل : طبق روابط گفته شده داریم:

$$x_m=\frac{1+3(-1)}{1+3}=\frac{-1}{2}$$
$$y_m=\frac{2+3(3)}{1+3}=\frac{11}{4}$$
$$z_m=\frac{3+3(3)}{1+3}=3$$

با کمی دقت ملاحظه می‌شود که مساله دارای جواب دیگری نیز می‌باشد که به صورت هندسی به راحتی قابل توجیه است.

مثال: نزدیکترین فاصله مبدا مختصات تا منحنی $\vec{r}=e^t\vec{i}+e^{-t}\vec{j}$ را به‌دست آورید.

حل : نقطه $A\left(e^t,e^{-t}\right)$ روی منحنی مزبور قرار دارد، فاصله آن تا مبدا مختصات به صورت زیر می‌باشد:

$$d=\sqrt{\left(e^t\right)^2+\left(e^{-t}\right)^2}=\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}=\sqrt{\left(e^t-e^{-t}\right)^2+2}$$

بنابراین، **حداقل** فاصله هنگامی اتفاق می‌افتد که عبارت $\left(e^t-e^{-t}\right)^2$ معادل صفر باشد و این امر زمانی ممکن می‌شود که $t=0$ باشد و لذا داریم:

$$d_{min}=\sqrt{2}$$

مثال: مطلوب است برداری که در جهت بردار $\vec{A}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ بوده و طولش برابر 9 باشد.

حل : بردار یکه بردار موردنظر به صورت زیر می‌باشد:

$$\vec{\lambda}_A=\frac{2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{1}{3}\left(2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\right)$$

لذا بردار مذکور به صورت زیر خواهد بود:

$$\vec{u}=|\vec{u}|\vec{\lambda}=9\left[\frac{1}{3}\left(2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\right)\right]=6\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$$

مثال: مقدار ثابت m چقدر باشد تا دو بردار زیر بر هم عمود باشند؟

$$\vec{u}=(2m+1)\vec{i}+(-3)\vec{j}+(1-m)\vec{k}$$
$$\vec{v}=-2\vec{i}+1\vec{j}+2\vec{k}$$

حل : شرط عمود بودن می‌طلبد که ضرب داخلی دو بردار برابر صفر باشد.

$$\vec{u}.\vec{v}=0 \Rightarrow -4m-2-3+2-2m=0 \Rightarrow -6m-3=0 \Rightarrow m=-\frac{1}{2}$$

مثال: زاویه بردار $\vec{r}=\cos\theta\sin\varphi\,\vec{i}+\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j}+\cos\varphi\vec{k}$ با محور **x**ها کدام است؟

حل : محور xها با بردار $\lambda=i$ قابل توصیف است.

بنابراین، چنانچه زاویه موردنظر را α در نظر بگیریم می‌توان نوشت:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{r}\,.\,\vec{\lambda}}{|\vec{r}|\,|\vec{\lambda}|}$$

$$|\vec{r}|=\sqrt{\cos^2\theta\sin^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}=\sqrt{\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}$$

$$=\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}=1 \qquad , \qquad |\vec{\lambda}|=1$$

$$\vec{r}.\vec{\lambda}=\cos\theta\sin\varphi$$

$$(\cos\alpha)\left(|\vec{r}|.|\vec{\lambda}|\right)=\vec{r}.\vec{\lambda} \Rightarrow \cos\alpha=\cos\theta\sin\varphi \Rightarrow \alpha=\cos^{-1}(\cos\theta\sin\varphi)$$

مثال: فرض کنید $P(4,1,6)$ ، $A(8,3,2)$ ، $B(2,-3,5)$ نقاطی در فضای R^3 باشند. در این صورت، **طول تصویر بردار $\overrightarrow{AP}$ روی** بردار $\overrightarrow{AB}$ را به‌دست آورید.

حل : داریم:

$$\overrightarrow{AP}=(-4,-2,4)\ ,\ \overrightarrow{AB}=(-6,-6,3)$$

و بردار یکه $\overrightarrow{AB}$ عبارت است از:

$$\lambda_{AB}=\frac{-6\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}}{\sqrt{36+36+9}}$$

لذا طول تصویر $\overrightarrow{AP}$ بر $\overrightarrow{AB}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{AP}\,.\,\lambda_{AB}=\left(-4\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}\right).\left(\frac{-6\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}}{9}\right)=\frac{48}{9}$$

مثال: می‌دانیم بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ ، $2\vec{a}$ بر هم عموداند. چنانچه $|\vec{a}|=\frac{1}{2}|\vec{b}|$ باشد، مطلوب است زاویه بین دو بردار $\vec{b},\vec{a}$.

مثال: شرط تعامد دو بردار آن است که ضرب داخلی آنها صفر باشد، لذا داریم:

$$2\vec{a}.\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0 \Rightarrow 2\vec{a}.\vec{a}+2\vec{a}.\vec{b}=0 \Rightarrow 2a^2+2ab\cos\theta=0$$

چون می‌دانیم که:

$$\vec{a}.\vec{b}=|a||b|\cos\theta$$

از طرفی طبق فرض داریم $a=\frac{b}{2}$ بنابراین خواهیم داشت:

$$2a^2+2a(2a)\cos\theta=0 \Rightarrow 2a^2(1+2\cos\theta)=0 \Rightarrow \cos\theta=\frac{-1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}$$

مثال: دو بردار $\vec{u}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ مفروض است. مختصات یکه برداری را بیابید که بر هر دو بردار مذکور عمود باشد.

حل : مطابق بحث‌های گفته شده، برداری که از ضرب خارجی دو بردار حاصل می‌شود عمود بر آن دو می‌باشد:

$$\vec{N}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\vec{i}(6+1)-\vec{j}(9-1)+\vec{k}(3+2)\Rightarrow\vec{N}=7\vec{i}-8\vec{j}+5\vec{k}$$

بردار یکه این بردار به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{\lambda}_N=\frac{7\vec{i}-8\vec{j}+5\vec{k}}{\sqrt{49+64+25}}$$

مثال: حجم هرم مثلث‌القاعده‌ای به رئوس $A(0,0,1)$ ، $B(2,3,5)$ ، $C(6,2,3)$ و $D(3,7,2)$ را به‌دست آورید:

حل : داریم:
$\overline{AB}=(2,3,4)$ ، $\overline{AC}=(6,2,2)$ ، $\overline{AD}=(3,7,1)$

لذا طبق بحث‌های قبل حجم متوازی‌السطوح ایجاد شده روی این سه بردار عبارت است از:

$$\overline{AB}\cdot\left(\overline{AC}\times\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}=120$$

لذا حجم هرم موردنظر $\frac{1}{6}$ مقدار یعنی 20 واحد مکعب خواهد بود.

مثال: مقدار **k** چقدر باشد، تا دو بردار $\vec{A}=(2k+1,3,-1)$ ، $\vec{B}=(3,-1,-k)$ وابستگی خطی داشته باشند؟

حل : همان‌طور که قبلاً ذکر شد دو بردار زمانی با هم وابستگی خطی دارند که موازی باشند. بنابراین داریم:

$$\frac{2k+1}{3}=\frac{3}{-1}=\frac{-1}{-k}$$

برای این‌که وابستگی خطی بین دو بردار باشد باید معادلهٔ بالا ارضاء شود.

$$\begin{cases}\frac{2k+1}{3}=\frac{3}{-1}\Rightarrow k=-5\\ \frac{3}{-1}=\frac{1}{k}\Rightarrow k=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

بنابراین نمی‌توان k را پیدا کرد که در هر دو معادله صدق کند به تعبیری دیگر، به ازای هر مقدار دلخواه k این دو بردار استقلال خطی دارند.

مثال: مقدار ثابت **m** چقدر باشد تا سه بردار $\vec{u}=(2m,1,m)$ ، $\vec{v}=(-2,0,1)$ ، $\vec{w}=(1,2,3)$ وابستگی خطی داشته باشند.

حل : همان‌طور که قبلاً اشاره شد سه بردار زمانی وابستگی خطی دارند، که روی یک صفحه واقع شده باشند بنابراین داریم:

$$\begin{vmatrix} 2m & 1 & m \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 2m(0-2)-1(-6-1)+m(-4-0)=0\Rightarrow m=\frac{7}{8}$$

معادلات صفحه و خط در فضا

معادله صفحه در فضا

معادله صفحه‌ای که از نقطه $A(x_0, y_0, z_0)$ گذشته و بردار $\vec{N}(a,b,c)$ بر آن عمود باشد به یکی از دو صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{\begin{array}{l} a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \\ ax+by+cz+d=0 \end{array}}$$

که در حالت دوم، مقدار d را می‌توان از این نکته که نقطه A متعلق به صفحه است و باید مختصاتش در آن صفحه صدق کند، به‌دست آورد.

در حالات خاص می‌توان معادله صفحه را به راحتی مشخص نمود و به عنوان مثال:

۱) اگر $a = 0$ باشد، صفحه موردنظر موازی محور xهاست.

۲) اگر $a = b = 0$ باشد، صفحه موردنظر موازی صفحه xoy است.

۳) اگر $d = 0$ باشد، صفحه موردنظر از مبدا مختصات خواهد گذشت.

تذکر: دو صفحه زمانی با هم موازی هستند که بردار نرمال‌هایشان با هم موازی باشند.

تذکر: دو صفحه زمانی بر هم عمود هستند که بردار نرمال‌هایشان بر هم عمود باشد.

تذکر: زاویه بین دو صفحه، زاویه بین بردار نرمال‌های آن دو صفحه می‌باشد.

نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0, z_0)$ از صفحه $ax+by+cz+d=0$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{AH = \left|\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|}$$

نکته: فاصله دو صفحه موازی $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ ax+by+cz+d'=0 \end{cases}$ عبارت است از:

$$\boxed{\text{فاصله} = \frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

نکته: معادله کلیه صفحاتی که از فصل مشترک دو صفحه $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ می‌گذرد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{a_1x+b_1y+c_1z+d_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0}$$

نکته: معادله صفحه گذرنده از سه نقطه $A(x_0,y_0,z_0)$ ، $B(x_1,y_1,z_1)$ ، $C(x_2,y_2,z_2)$ عبارت است از:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0}$$

معادله خط در فضا

معادله خطی که از نقطه $A(x_0,y_0,z_0)$ بگذرد و با بردار $\vec{u}(p,q,r)$ موازی باشد به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}}$$

(دقت کنید که در این رابطه ضریب x , y , z ، $+1$ می‌باشد).

به مقادیر p ، q , r پارامترهای هادی خط می‌گویند و به همین ترتیب به بردار $\vec{u}$ بردار هادی خط گویند. معادله همین خط در فرم پارامتری (بر حسب پارامتر t) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} x=pt+x_0 \\ y=qt+y_0 \\ z=rt+z_0 \end{cases}$$

که در این حالت به ازای tهای مختلف، مختصات نقاط مختلف خط مزبور مشخص می‌شود.

تذکر: توجه کنید که با نوشتن معادله خط به صورت پارامتری، می‌توان بسیاری از مسایل مربوط به خط را حل نمود، به عنوان مثال برای فهمیدن این که آیا دو خط D_1,D_2 متقاطع هستند می‌توان مساله را این‌گونه تعبیر کرد که آیا نقطه‌ای روی خط D_1 موجود است که مختصات آن در معادله خط D_2 نیز صدق کند و اگر چنین نقطه‌ای یافت بشود، آن نقطه، نقطه تقاطع دو خط است. **البته** به این نکته توجه داشته باشید که عدم توازی دو خط به منزله متقاطع بودن آن دو خط نمی‌باشد چرا که ممکن است آن دو خط متنافر باشند.

نکته: معادله خط گذرنده از دو نقطه $A(x_0,y_0,z_0)$ ، $B(x_1,y_1,z_1)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}}$$

در حالات خاص نیز می‌توان معادله خط را به راحتی مشخص نمود به عنوان مثال:

الف) معادله خطی که به موازات محور xها می‌باشد به صورت $y=y_0$ ، $z=z_0$ نوشته می‌شود که در آن y_0,z_0 مولفه‌های y ، z دریک نقطه خاص از خط موردنظر است.

ب) معادله خطی که به موازات صفحه yoz می‌باشد به صورت $\begin{cases} x=x_0 \\ \frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \end{cases}$ می‌باشد که در آن x_0,y_0,z_0 مختصات یک نقطه خاص موردنظر است.

وضعیت دو خط نسبت به همدیگر:

دو خط به معادلات $\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1}$, $\frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{r_2}$ را در نظر بگیرید. بدیهی است شرط توازی و تعامد دو خط، همان شرط توازی و تعامد بردارهای هادی دو خط می‌باشد.

برای شرط توازی دو خط داریم: $\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2}$

و برای شرط تعامد دو خط داریم: $p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2=0$

و بدیهی است که زاویه بین دو خط همان زاویه بین بردارهای هادی دو خط است.

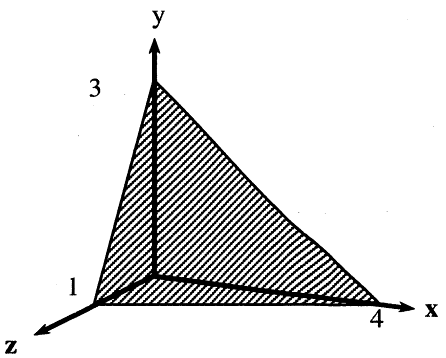
شرط هم‌صفحه بودن این دو خط به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}=0$$

بنابراین، شرط متنافر بودن دو خط مزبور آن است که دترمینان فوق مخالف صفر باشد.

مثال: صفحه $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+z=1$ را در نظر بگیرید. حجم ساخته شده توسط این صفحه و صفحات مختصات چقدر است؟

حل :



محل تقاطع صفحه با محور xها $\xrightarrow{y=z=0}\frac{x}{4}=1\Rightarrow x=4$

محل تقاطع صفحه با محور y ها $\xrightarrow{x=z=0}\frac{y}{3}=1\Rightarrow y=3$

محل تقاطع صفحه با محور z ها $\xrightarrow{x=y=0}z=1$

حجم هرم مورد نظر $=\frac{1}{3}\times$ (مساحت قاعده) $\times$ (ارتفاع) =

$\frac{1}{3}\times\frac{4\times 3}{2}\times 1=2$

مثال: معادله $(x+2y+3z+4)^2+(x-2y+2z-4)^2=0$ بیانگر چه شکلی در فضا می‌باشد؟

حل : با توجه به معادله، ملاحظه می‌شود که این معادله به صورت $A^2+B^2=0$ بدیهی است برای داشتن جواب لازم است $A=B=0$ پس داریم:

$$\begin{cases} x-2y+2z-4=0 \\ x+2y+3z+4=0 \end{cases}$$

این دو معادله، معادلات دو صفحه متقاطع می‌باشند (به دلیل آنکه ضرایب دو معادله متفاوت هستند دو صفحه موازی نمی‌باشند). پس شکل موردنظر فصل مشترک دو صفحه، یعنی یک خط راست می‌باشد.

مثال: خطی به معادله $\frac{2x-1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{3z+1}{2}$ نسبت به صفحه‌ای به معادله $4x+4y-21z=1$ چه وضعیتی دارد؟

حل : بردار نرمال صفحه به صورت $\vec{N}=(4,4,-21)$ می‌باشد.

از طرفی معادله خط به صورت $\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$ می‌باشد در نتیجه بردارهای خط به صورت $\vec{u}\left(\frac{3}{2},2,\frac{2}{3}\right)$ مـی‌باشـد. ملاحظـه می‌شود دو بردار فوق بر هم عمودند، چرا که ضرب داخلی آنها صفر است:

$$4\left(\frac{3}{2}\right)+4(2)-21\left(\frac{2}{3}\right)=0$$

پس بدیهی است که صفحه و خط مزبور با هم موازیند.

مثال: معادله خط و صفحه‌ای به صورت زیر داده شده است. مطلوب است:

الف) محل تقاطع خط و صفحه را بیابید. ب) زاویه بین خط و صفحه را به‌دست آورید.

$$\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{3-y}{1}=z+1$$
$$p:x+2y+z+4=0$$

حل : الف) برای حل این تست اگر مساله به صورت تستی مطرح شده بود سریعترین راه‌حل، چـک کـردن نقـاط در معـادلات خـط و صفحه بود. بدیهی است نقطه‌ای که در هر دو معادله صدق کند محل تقاطع خط و صفحه می‌باشد.

برای حل تشریحی معادله خط را به صورت پارامتری می‌نویسیم:

$$\Delta:\begin{cases}x=2t+1\\ y=3-t\\ z=t-1\end{cases}$$

مقادیر z,y,x را به صورت پارامتری در معادله صفحه قرار می‌دهیم تا پارامتر t به‌دست آید.

$$(2t+1)+2(3-t)+(t-1)+4=0\to t=-10$$

مقدار t را در معادلات خط قرار می‌دهیم تا مقادیر نقطه تلاقی به‌دست آید:

$$x=2(-10)+1=-19$$
$$y=3-(-10)=13$$
$$z=(-10)-1=-11$$

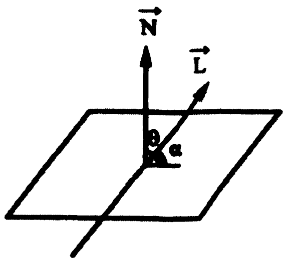
ب) بدیهی است بردار نرمال صفحه $\vec{N}(1,2,1)$ عمود بر صفحه و بردار هادی خط $\vec{L}(2,-1,1)$ موازی خط Δ می‌باشند.

زاویه بین دو بردار به صورت روبرو به‌دست می‌آید:

$$\cos\theta=\frac{\vec{N}.\vec{L}}{|\vec{N}|\,|\vec{L}|}=\frac{(2)(1)+(2)(-1)+(1)(1)}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$$
$$\cos\theta=\frac{1}{6}\Rightarrow\theta=\cos^{-1}\frac{1}{6}$$

همان‌طور که در شکل نیز ملاحظه می‌شود زاویه بین خط و صفحه (α) متمم زاویه θ می‌باشد.

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)$$



مثال: معادله دو صفحه به صورت زیر موجود است.

$$P: x+2y-z+1=0$$
$$Q: 2x+z+3=0$$

الف) معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(1,2,3)$ بگذرد و با هر دو صفحه فوق موازی باشد.

ب) معادله صفحه‌ای را بنویسید که از فصل مشترک این دو صفحه بگذرد و بر صفحه $R: 3x-y+2z=0$ عمود باشد.

حل : **(الف)** بدیهی است بردار نرمال‌های دو صفحه Q , P به ترتیب برابر $\vec{N}_1(1,2,-1)$ و $\vec{N}_2(2,0,1)$ می‌باشند. چون خط مذکور با هر دو صفحه موازی است، در نتیجه باید بردار هادی خط بر بردارهای $\vec{N}_2, \vec{N}_1$ عمود باشد.

$$\vec{N}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$$

بردار $\vec{N}$ بر هر دو بردار $\vec{N}_2, \vec{N}_1$ عمود است، در نتیجه همان بردار هادی خط است.

معادله خط: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-4}$

ب) می‌دانیم معادله کلیه دسته صفحاتی که از فصل مشترک دو صفحه P , Q می‌گذرد به صورت $P+kQ=0$ می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$(x+2y-z+1)+k(2x+z+3)=0 \quad\Rightarrow\quad x(1+2k)+2y+z(k-1)+1+3k=0 \qquad (I)$$

شرط تعامد صفحه I با صفحه $R: 3x-y+2z=0$ عمود بودن بردارهای نرمال آنهاست.

$$(3,-1,2)\ .\ (1+2k,2,k-1)=0$$
$$(3)(1+2k)-(1)(2)+2(k-1)=0\Rightarrow 8k=1\Rightarrow k=\frac{1}{8}$$

حال k را در معادله (I) قرار می‌دهیم:

$$x\left(1+2\times\frac{1}{8}\right)+2y+z\left(\frac{1}{8}-1\right)+1+3\left(\frac{1}{8}\right)=0$$
$$\frac{5}{4}x+2y-\frac{7}{8}z+\frac{11}{8}=0$$

مثال: دو وجه یک مکعب بر روی دو صفحه زیر واقع شده‌اند. مطلوب است حجم این مکعب.

$$\begin{cases} P: 2x+y-3z+1=0 \\ Q: 4x+2y-6z+4=0 \end{cases}$$

حل : همان‌طور که ملاحظه می‌شود دو صفحه مذکور موازی هستند:

$$P: 2x+y-3z+1=0$$
$$Q: 2x+y-3z+2=0$$

فاصله بین دو صفحه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$L=\frac{|1-2|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

این فاصله همان طول ضلع مکعب است در نتیجه حجم مکعب برابراست با:

$$V=L^3=\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^3$$

دستگاه معادلات خطی

دو مبحث زیر، برای حل دستگاه معادلات خطی برای دستگاه‌های سه معادله و سه مجهول مطرح شده، اما به سادگی برای دستگاه‌های n معادله و n مجهول نیز قابل تعمیم است.

الف) دستگاه معادلات همگن:

به معادلات به فرم زیر که طرف دوم آنها صفر است، همگن گویند.

دستگاه معادلات همگن زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \\ a''x+b''y+c''z=0 \end{cases}$$

به‌وضوح دیده می‌شود $x=y=z=0$ جوابی برای دستگاه مزبور است که اصطلاحاً به آن جواب بدیهی گفته می‌شود.

ثابت می‌شود، شرط لازم و کافی برای آنکه دستگاه همگن فوق دارای جواب غیربدیهی نیز باشد و به تعبیری بی‌نهایت دسته جواب داشته باشد این است، که دترمینان ضرایب این دستگاه صفر باشد، یعنی:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}=0$$

مثال: مقدار ثابت k چقدر باشد تا دستگاه معادلات زیر دارای بی‌نهایت دسته جواب گردد؟

$$\begin{cases} (2k+3)x+(3k+1)y=0 \\ -2x+3y=0 \end{cases}$$

حل : برای وجود بی‌نهایت دسته جواب باید داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} 2k+3 & 3k+1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 3(2k+3)+2(3k+1)=0 \Rightarrow k=\frac{-11}{12}$$

مثال: مقدار ثابت حقیقی m را به‌گونه‌ای بیابید تا دستگاه معادلات زیر دارای جواب غیربدیهی نیز باشد؟

$$\begin{cases} 2x+my+z=0 \\ x-3y+(m+1)z=0 \\ -x+y+2z=0 \end{cases}$$

حل :

$$\begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ 1 & -3 & m+1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad 2(-6-m-1)-m(2+m+1)+1(1-3)=0$$

$$\Rightarrow \quad -14-2m-3m-m^2-2=0 \quad \Rightarrow \quad m^2+5m+16=0$$

با تشکیل Δ معادله درجه دوم می‌بینیم:

$$\Delta=25-4(16)<0$$

یعنی معادله موردنظر دارای ریشه حقیقی نمی‌باشد. به این تعبیر، دستگاه معادلات مذکور نمی‌تواند دارای جواب غیربدیهی باشد.

ب) دستور کرامر در حل دستگاه معادلات خطی

دستگاه مقابل را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

مطابق روش کرامر، مجهولات این دستگاه را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه نمود:

$$\boxed{x=\frac{\Delta x}{\Delta}\ ,\ \ y=\frac{\Delta y}{\Delta}\ ,\ \ z=\frac{\Delta z}{\Delta}}$$

که در آن Δ، دترمینان ضرایب دستگاه است یعنی:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

و Δx , Δy , Δz دترمینان‌های محذوف هستند به‌طوری‌که:

$$\Delta x=\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}\qquad \Delta y=\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}\qquad \Delta z=\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$$

دقت کنید دو حالت خاص زیر قابل بررسی است:

۱) اگر $\Delta=0$ باشد ولی $(\Delta x\ ,\ \Delta y\ ,\ \Delta z)\neq 0$ باشند، در این حالت، دستگاه مذکور غیرممکن است و یا به تعبیری فاقد جواب می‌باشد.

۲) اگر $(\Delta\ ,\ \Delta x\ ,\ \Delta y\ ,\ \Delta z)=0$ باشند، در این حالت دستگاه مذکور مبهم بوده و به تعبیری دستگاه دارای بی‌نهایت دسته جواب می‌باشد.

مثال: مطلوب است محاسبه z از دستگاه زیر:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=4 \\ x-3y+2z=0 \\ 3x+4y+2z=5 \end{cases}$$

حل : مطابق دستور کرامر داریم:

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{7}{-29}$$

مقادیر x , y را به عنوان تمرین محاسبه کنید. $\left(x=\frac{41}{29}\ ,\ y=\frac{9}{29}\right)$

مثال: دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید. مقدار k , m را طوری پیدا کنید تا این دستگاه دارای بی‌نهایت دسته جواب باشد.

$$\begin{cases} 2x-y+3z=k \\ 3x+2y+z=3 \\ mx-y+10z=6 \end{cases}$$

حل : می دانیم برای آنکه دستگاه دارای بی‌نهایت دسته جواب باشد باید $\Delta=0$ و $(\Delta x=\Delta y=\Delta z=0)$ باشند.
پس می‌نویسیم:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ m & -1 & 10 \end{vmatrix}=0$$

$$2(20+1)+1(30-m)+3(-3-2m)=0\Rightarrow 7m=61\Rightarrow m=\frac{61}{7}$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} k & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 10 \end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ k(20+1)+1(30-6)+3(-3-12)=0\Rightarrow 21k=21\Rightarrow k=1$$