*

بخش اول

جامعه آماری

جامعه ای که افراد آن حداقل یک صفت مشترک دارند.(کشور ایران)

صفت متغیر

صفتی که ازفردی به فرد دیگرمنتقل می شود که بر دو نوع زیرمی باشد
کمی و کیفی

کمی
- پیوسته کلیه اعداد حقیقی(قد ، سن)
- گسسته اعداد صحیح(تعداد فرزندان، تعداد اتاق های خانه)

کیفی(جنسیت و دین)

مراحل انجام تحقیق آماری

۱)جمع آوری اطلاعات
- سر شماری
- نمونه گیری

۲)جمع آوری داده ها
- پرسش نامه
- غیر پرسش نامه

۳)استخراج داده ها
- دستی
- ماشینی

۴)آمار توصیفی*
- معیارهای مرکزی(میانگین، میانه، چارکها و ....)
- معیارهای پراکندگی(واریانس، دامنه تغییرات، انحراف معیار ، ضریب تغییرات ، چولگی ، کشیدگی)

۵)آمار استنباطی(تامین نتایج نمونه به جامعه)

- فواصل اطمینان
- آزمونهای فرضی

*آمار توصیفی(توصیف داده ها)

جدول توزیع فراوانی

جدولی که بر اساس فراوانی مشاهدات تهیه می شود.

فراوانی ساده یا مطلق (f_i)

فراوانی نسبی(f_c) فراوانی ساده ÷کل $\qquad f_c = \dfrac{f_i}{n}$

فراوانی تجمعی(F_i) فراوانی ساده هر مشاهده + فراوانی مشاهده قبلی

فراوانی تجمعی نسبی(F_c) فراوانی تجمعی ÷ تعداد کل مشاهدات $\qquad F_c = \dfrac{F_i}{n}$

درصد فراوانی نسبی $\%F_c \times ۱۰۰$ درصد فراوانی تجمعی نسبی $\%F_c \times ۱۰۰$

• مثال

نمره شش دانش آموز در جدول زیر آمده است. مطلوبست جدول توزیع فراوانی و محاسبه کلیه فراوانی ها

کد دانش آموزان	نمره
1	12
2	18
3	17
4	18
5	12
6	10

• حل

i	fi	Fi	fc	Fc	%fc×100	%Fc×100
10	1	1	1.6	1.6		
12	2	3	2.6	2.6		
17	1	4	1.6	4.6		
18	2	6	2.6	6.6		100
57	6		1		100	

نکات

۱)همیشه جمع ستون فراوانی ساده برابر تعداد کل مشاهدات است.

۲)جمع ستون فراوانی نسبی برابر یک است.

۳)آخرین عدد ستون فراوانی تجمعی برابر تعداد کل مشاهدات است.

۴)آخرین عدد ستون فراوانی تجمعی نسبی برابر یک است.

۵) جمع ستون درصد فراوانی نسبی برابر ۱۰۰ است.

۶) آخرین عدد ستون درصد فراوانی تجمعی نسبی برابر ۱۰۰ است.

جدول توزیع فراوانی به روش طبقه بندی مشاهدات

روش طبقه بندی فقط برای داده هایی که ماهیت پیوسته دارند انجام میشود.

معمولا کمترین تعداد طبقه را ۵ و بیشترین آن را ۲۰ می گیرند.

۱)تعیین تعداد طبقات

فرمول استورگس $K=۱+۳/۳ \log n$

تعداد طبقات   تعداد مشاهدات

*اگر جواب مثلا ۳/۲۳ در آمد حتما باید آنرا رو به بالا رند کنیم که می شود ۴

۲)تعیین دامنه تغییرات

$D=X_{max}-X_{min}$

$X_{min}=$ کمترین داده $-S$ $X_{max}=$ بیشترین داده $+S$

$S=\frac{\text{واحد گرد شده}}{۲}$

۳)تعیین عرض (طول،فاصله)طبقه

$W=\frac{D}{K}$

عرض طبقه

اگر اعشار نداشته باشد، به بالا رند می کنیم.

- **مثال**

وزن های ۴۰ قالب کره که نزدیک ترین عدد صحیح گرد شده اند به قرار زیر است:

الف)یک جدول فراوانی بر اساس طبقه بندی مشاهدات انجام دهید.

ب)چند درصد قالب های کره دارای وزنی بین ۳۵/۵_۳۰/۵ می باشد.

ج)چند درصد قالب های کره کمتر از ۳۰/۵ می باشد.

ح) مطلوبست محاسبه پارمترهای مرکزی(میانگین،میانه،مد،چارک)

د) مطلوبست محاسبه پارمترهای پراکندگی(واریانس،انحراف معیار،متوسط انحراف)

۵۲،۲۵،۲۴،۴۷،۳۶،۵۱،۳۴،۳۸،۴۶،۳۳،۴۷،۳۶،۳۸،۵۰،۴۷،۳۴،۴۱،۴۰،۴۲،۴۰،۲۶،۲۹،۳۰

۳۲،۳۰،۳۵،۳۷،۳۷،۴۱،۲۱،۳۱،۳۰،۲۶،۳۵،۴۵،۲۳،۴۳،۳۱،۳۴،۴۳

- **حل**

۱)تعیین تعداد طبقه

$$K=۱+۳/۳\log ۴۰ =۱+۳/۳\times ۱/۶=۶/۲۸ \sim ۷$$

۲)تعیین دامنه تغییرات

$$S=۱/۲$$

$$X_{max}=۵۲+۰/۵=۵۲/۵ \qquad X_{min}=۲۱-۰/۵=۲۰/۵$$

$$d=۵۲/۵-۲۰/۵=۳۲$$

۳)تعیین عرض طبقه

$$W=d/K =۳۲/۷ =۴/۵\sim ۵$$

	fi
20/5-25/5	3
25/5-30/5	6
30/5-35/5	10
35/5-40/5	8
40/5-45/5	6
45/5-50/5	5
50/5-55/5	2
	40

ب)$\frac{10}{40} \times 100 = \%25$

ج) $\frac{19}{40}\times 100 = \%47/5$ ← جمع ۳عدد اول در ستون دوم

- **مثال**

داده های زیر یک نمونه ۵۰ تایی از اندازه نیروی پارگی نخ های کتان می باشد

۲۱/۲،۲۷/۳،۲۰/۶،۲۵/۴،۳۶/۹،۲۸/۳،۳۳/۷،۲۹/۵۳۴/۱،۲۴/۶،۲۷/۱،۲۹/۴،۲۱/۸،۲۷/۵

۲۸/۹،۲۵،۲۱/۹،۳۷/۵،۹/۶،۲۴/۸،۳۲/۷،۲۹/۳،۳۳/۵،۲۲/۲،۲۸/۱،۲۹/۵،۱۷/۳،۲۹/۶،۲۲/۷

۲۵/۴،۳۰/۲،۲۹،۲۶/۸،۳۳/۳،۳۴/۵،۲۳/۹،۳۶/۸،۲۸/۷،۳۳/۲،۲۳/۶،۲۳،۲۹/۲،۳۴/۸،۳۷

۳۸/۴،۲۶/۴،۲۳/۵،۱۸/۶،۲۸/۳،۲۴

مطلوبست جدول توزیع فراوانی به روش طبقه بندی مشاهدات

- **حل**

۱)تعیین تعداد طبقه

$K=۱+۳/۳\log۵۰ \;\; = ۱+۳/۳\times۱/۶۹=۶/۶\sim۷$

۲)تعیین دامنه تغییرات

$$S=\frac{0/1}{2}$$

X_{min}= ۱۷/۳−۰/۰۵=۱۷/۲۵ X_{max}=۳۸/۴ +۰/۰۵=۳۸/۴۵

d=۳۸/۴۵−۱۷/۲۵=۲۱/۲

۳)تعیین عرض طبقه

$$W=\frac{D}{K}=\frac{21/2}{7}=۳/۰۲\sim۳/۱$$

چون۲صدم است و تبدیل به دهم شده ولی اگر۳/۲ بود می شد ۴

	fi
17/25-20/35	2
20/35-23/45	7
23/45-26/55	10
26/55-29/65	17
29/65-32/75	3
32/75-35/85	6
35/85-38/95	5
	50

- **تمرین**

داده های زیر قطر ۵۰ بلبرینگ ساخته شده توسط یک کارخانه بر حسب اینچ می باشد

0/731	0/738	0/743	0/740	0/736
0/736	0/728	0/737	0/736	0/735
0/733	0/745	0/736	0/742	0/740
0/739	0/733	0/730	0/732	0/739
0/741	0/735	0/732	0/745	0/727
0/725	0/733	0/738	0/734	0/732
0/742	0/725	0/728	0/736	0/737
0/732	0/735	0/744	0/729	0/739
0/727	0/736	0/734	0/735	0/736
0/734	0/730	0/728	0/724	0/741

الف)مطلوبست جدول توزیع فراوانی به روش طبقه بندی مشاهدات

ب)مطلوبست محاسبه پارمترهای مرکزی

ج)مطلوبست محاسبه پارامترهای پراکندگی

معیارهای مرکزی

۱)میانگین

اگر داده ها طبقه بندی نشده باشد(جدول توزیغ فراوانی نداشته باشیم)

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1} x_i}{n}$$

اگر جدول توزیع فراوانی داشته باشیم(چه طبقه بندی باشد چه نباشد)

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} fixi}{n}$$

*در صورتیکه طبقه بندی نداشته باشیم x_i خود مشاهده است.

*درصورتیکه طبقه بندی داشته باشیم x_i نشان دسته است،یعنی

حد بالا+حد پایین ÷ ۲

- **مثال**

مطلوبست میانگین نمره ها

جلسه قبل

میانگین نمره ها $\overline{X} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{87}{6} = 14/5$

Xi	fi	fi xi
10	1	10
12	2	24
17	1	17
18	2	36
	6	87

صورت مثال ها در جلسات قبل مطرح شده است.

$$\overline{X}=\frac{\sum xifi}{n}=\frac{1475}{40}=36/875\approx 36/9$$
$$X_i=\frac{20/5+25/5}{2}=23$$

	fi	xi	xi fi	Fi
20/5-25/5	3	23	69	3
25/5-30/5	6	28	168	9
30/5-35/5	10	33	330	19
35/5-40/5	8	28	304	27
40/5-45/5	6	43	258	33
45/5-50/5	5	48	240	38
50/5-55/5	2	53	106	40
	40		1475	

---

۲)میانه

الف)اگر طبقه بندی نداشته باشیم

تعداد مشاهدات

$m=\frac{n+1}{2}$ موقعیت داده میانه ها

داده m ام میانه است.

ب)اگر طبقه بندی داشته باشیم(*ابتدا طبقه میانه را پیدا کن)

$$med=L+\frac{\frac{n}{2}-F_{i-1}}{f_i}\times I$$

$\frac{n}{2}$ تعداد مشاهدات　　L حد پایین طبقه میانه

F_{i-1} فراوانی تجمعی ماقبل میانه　　f_i فراوانی بازده طبقه میانه

I عرض طبقه

میانه نقطه ای است که نصف مشاهدات سمت راست آن و نصف دیگر مشاهدات سمت چپ آن قرار گیرد.

- **مثال برای الف**

میانه داده های زیر را بدست آورید.

۵ ۸ ۰ ۲ ۳ ۱۲

مرتب

۰ ۲ ۳ ۵ ۸ ۱۲

موقعیت میانه $m=\frac{n+1}{2}=\frac{6+1}{2}=\frac{7}{2}=3/5$

داده شماره ۳/۵ میانه است $\frac{3+5}{2}=4$

- **مثال برای ب**

	fi	xi	xi fi	Fi
20/5-25/5	3	23	69	3
25/5-30/5	6	28	168	9
30/5-35/5	10	33	330	19
35/5-40/5	8	28	304	27
40/5-45/5	6	43	258	33
45/5-50/5	5	48	240	38
50/5-55/5	2	53	106	40
	40		1475	

$$med=L+\frac{\frac{n}{2}-F_{i-1}}{f_i}\times I$$

میانه $35/5+\frac{\frac{40}{2}-19}{8}\times 5=36/125$

۳)چارکها

الف)اگرداده ها طبقه بندی نباشد.

(صدک۲۵ام) Q_1 موقعیت = $\frac{1}{4}\times N$

تعداد کل مشاهدات =N

(صدک ۷۵ام) Q_3 موقعیت = $\frac{3}{4}\times N$

ب)اگر داده ها طبقه بندی باشد.

ابتدا طبقه چارک اول و طبقه چارک سوم را پیدا می کنیم.

$$Q = L + \frac{\frac{N}{4} - F_{i-1}}{fi} \times I$$

$\frac{N}{4}$ تعداد کل مشاهدات — F_{i-1} فراوانی طبقه ما قبل Q_1

L حد پایین طبقه چارک اول

I عرض طبقه — f_i فراوانی ساده طبقه Q_1

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - F_{i-1}}{fi} \times I$$

F_{i-1} فراوانی طبقه ما قبل Q_3 — f_i فراوانی ساده طبقه Q_3

L حد پایین طبقه چارک سوم — I عرض طبقه

• **مثال**

طبقه Q۱

	fi	xi	xi fi	Fi
20/5-25/5	3	23	69	3
25/5-30/5	6	28	168	9
30/5-35/5	10	33	330	19
35/5-40/5	8	28	304	27
40/5-45/5	6	43	258	33
45/5-50/5	5	48	240	38
50/5-55/5	2	53	106	40
	40		1475	

طبقه Q۳

$$\frac{1}{4}\times 40 = 10$$

دهمین داده کدام طبقه است؟

$$Q = L + \frac{\frac{N}{4} - F_{i-1}}{fi} \times I$$

$$Q_1 = 30/5 + \frac{\frac{1}{4} - 40 - 9}{10} \times 5 = 31$$

$$\frac{3}{4}\times 40 = 30$$

سی امین داده کدام طبقه است؟

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - F_{i-1}}{fi} \times I$$

$$Q_3 = 40/5 + \frac{\frac{3}{4} - 40 - 27}{6} \times 5 = 43$$

٤)صدکها

الف)اگر داده ها طبقه بندی نشده باشد.

Pموقعیت صدک امp$=n\times p$

ب) اگر داده ها طبقه بندی شده باشد.

$$\text{صدک}\ p\text{ام} = L+\frac{Np-F_i-1}{f_i}\times I$$

I عرض طبقه

N تعداد کل مشاهدات

F_{i-1} تجمعی ماقبل صدک

f_i فراوانی ساده طبقه صدک

L حد پایین طبقه صدک

- **مثال**

طبقه صدک بیستم

	fi	xi	xi fi	Fi
20/5-25/5	3	23	69	3
25/5-30/5	6	28	168	9
30/5-35/5	10	33	330	19
35/5-40/5	8	28	304	27
40/5-45/5	6	43	258	33
45/5-50/5	5	48	240	38
50/5-55/5	2	53	106	40
	40		1475	

طبقه صدک هشتادم

محاسبه صدک بیستم و هشتادم؟

- **حل**

$$\text{صدک بیستم} = L + \frac{N \times 0/2 - F_i - 1}{f_i} \times I$$

۰/۲×۴۰=۸

داده هشتم در کدام طبقه قرار دارد؟

$$\text{صدک بیستم} = 25/5 + \frac{40 \times 0/2 - 3}{6} \times 5 = 29/5$$

صدک هشتادم $= L + \dfrac{N \times 0/8 - F_i - 1}{f_i} \times I$

۰/۸×۴۰=۳۲

داده سی ودوم در کدام طبقه قرار دارد؟

صدک هشتادم $= 40/5 + \dfrac{40 \times 0/8 - 27}{6} \times 5 = 44/6$

۵)مد(نما)

الف) اگر داده ها طبقه بندی نشده باشد

▒ **در جدول توزیع فراوانی داده ای که دارای بیشترین فراوانی است مد می باشد.**

ب) اگر داده ها طبقه بندی شده باشد

ابتدا طبقه مد را معلوم می کنیم.

$$\text{مد} = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I$$

I فاصله طبقه

d_1 اختلاف فراوانی طبقه مد از طبقه قبلی

d_1+d_2 اختلاف فراوانی طبقه مد با طبقه بعدی

L حد پایین طبقه مد

- **مثال**

طبقه مد

	fi	xi	xi fi	Fi
20/5-25/5	3	23	69	3
25/5-30/5	6	28	168	9
30/5-35/5	10	33	330	19
35/5-40/5	8	28	304	27
40/5-45/5	6	43	258	33
45/5-50/5	5	48	240	38
50/5-55/5	2	53	106	40
	40		1475	

- **حل**

$$\text{مد} = L+\frac{d_1}{d_1+d_2}\times I$$

$$\text{مد} = 30/5+\frac{4}{4+2}\times 5=33/8$$

۶)میانگین هندسی(GM)

$$G_iM = \sqrt[n]{x_1^{f_1} . x_2^{f_2} ....x_k^{f_k}}$$

n تعداد کل مشاهدات

- **مثال**

رشد سالانه اشتغال در جامعه ای بین سال های ۶۷-۵۹ به صورت زیر است:

۳،۳/۱،۳/۲،۳/۵،۳/۶،۳/۸،۳/۸،۳/۹،۴

- **حل**

GM= $\sqrt[9]{3\times3/1\times3/2\times3/5\times3/6\times3/8^2\times3/9\times4} = x^{\frac{1}{9}} = 3/53$

۷)میانگین همساز(هارمونیک)

$$\overline{X}_H = \frac{n}{\frac{f_1}{x_1}+\frac{f_2}{x_2}+....+\frac{f_k}{x_k}}$$

- **مثال**

تعداد ۵ نفر از کارکنان یک موسسه کاری را به ترتیب در مدت ۶،۱۰،۸،۱۲،۱۶ روز تمام می کنند.متوسط تعداد روزهایی که این کار تمام شود چقدر است(میانگین هارمونیک)

- **حل**

$$\overline{X}_H = \frac{n}{\frac{f_1}{x_1}+\frac{f_2}{x_2}+....+\frac{f_k}{x_k}}$$

$$\overline{X}_H = \frac{5}{\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}} = 9/3$$

۸)میانگین پیراسته

برای محاسبه این میانگین ابتدا چارک اول و چارک سوم را بدست می آوریم; سپس داده های کمتر از چارک اول و داده های بیشتر از چارک سوم را حذف می کنیم و میانگین داده های باقیمانده را بدست می آوریم.

۹)میانگین ویزوری

ابتدا چارک اول و سوم را بدست می آوریم. به جای داده های کمتر از چارک اول ، خود چارک اول و به جای داده های بیشتر از چارک سوم ،خود چارک سوم را قرار می دهیم،سپس میانگین کل اعداد را بدست می آوریم.

- **مثال**

۹کارگر صنعتی تحت آزمون قرار گرفته اند و اندازه های زیر بدست آمده:

۱۳۶/۷،۱۰۵/۸،۱۳۲/۱،۱۲۵،۱۵۲/۴،۱۱۶/۴،۹۳/۹،۱۰۶/۵،۱۲۸/۳

مطلوبست محاسبه میانگین پیراسته و ویزوری؟

- **حل**

مرتب می کنیم

۹۳/۹،۱۰۵/۸, ۱۱۶/۴،۱۳۲/۱،۱۲۵،۱۲۸/۳،۱۳۲/۱،۱۳۶/۷،۱۵۲/۴

Q_1 ۰/۲۵×۹=۲/۲۵~۳

Q_3 ۰/۷۵×۹=۶/۷۵~۷

میانگین پیراسته $= \frac{106/5+116/5+125+128/3+132/1}{5} = 121/66$

میانگین ویزوری$= \frac{106/5+106/5+106/5+116/4+125+128/3+132/1+132/1+132/1}{9} = 120/61$

معیارهای پراگندگی

۱)دامنه تغییرات

$$D = X_{max} - X_{min}$$

۲)انحراف متوسط

$$AD = \frac{\sum_{i\cdot1}^{k} f_i \left| X_i - \overline{X} \right|}{n}$$

۳)واریانس

$$\delta = \frac{\sum_{i.1}^{k} \left(X_i - \overline{X}\right)}{n}$$

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i.1}^{k} f_i X_i^{\,2}}{n} - \left(\overline{X}\right)^2$$ ⟶ توصیه استاد

٤)انحراف معیار

جذر واریانس

*در صورتی که داده ها طبقه بندی نشده باشد X_i خود مشاهده است.

*در صورتی که داده ها طبقه بندی شده باشد X_i نماینده هر طبقه است.

- **مثال**

fi	xi	xi fi	Fi	fi |xi-x̄|	x²i fi
3	23	69	3	3×| 23-36/9 |=41/7	(23²)×3=1587
6	28	168	9	6×|28-36/9|=53/4	4704
10	33	330	19	39	1089
8	28	304	27	8	11552
6	43	258	33	36/6	11094
5	48	240	38	55/5	11520
2	53	106	40	32/2	5618
40		1475		267/2	56965

- **حل**

$$\text{AD}=\frac{\sum_{i.1}^{k} f_i\left|X_i-\overline{X}\right|}{n} \Longrightarrow \text{AD}=\frac{267/2}{40}=6/68$$

$$\delta^2=\frac{\sum_{i.1}^{k} f_i X_i^{\ 2}}{n}-\left(\overline{X}\right)^2$$

$$\delta^2=\frac{56965}{40}-(36/9)^2=1424/25-136/61=62/51$$

$$\delta=\sqrt{62/51}\Rightarrow\delta=7/9$$

$\overline{X}=36/9$

۵)پراکندگی نسبی(ضریب تغییرات)

برای مقایسه دو جامعه ای که هم میانگین و هم انحراف معیارشان متفاوتند از ضریب تغییرات استفاده می کنند.

$$c.v=\frac{\delta}{\overline{\overline{X}}}$$

- **مثال**

یک تولید کننده لامپ تصویر ۲ نوع لامپ تولید می کند. نوع A ونوع B ; عمر متوسط A برابر ۱۴۹۵وانحراف معیارآن برابر ۲۸۰ساعت است.
عمر متوسط B برابر ۱۸۷۵وانحراف معیار آن برابر ۳۱۰ساعت است.تولید کننده در تولید کدام یک از این دو لامپ موفق تر بوده(محاسبه ضریب تغییرات)

- **حل**

$$c.v_A=\frac{280}{1495}=0/187$$

$$c.v_B=\frac{\delta_B}{\overline{\overline{X}}_B}=\frac{320}{1875}=0/165$$

$\%c.v_A=$ ۰/۱۸۷×۱۰۰=٪۱۸/۷

$\%c.v_B=$ ۰/۱۶۵×۱۰۰=٪۱۶/۵

*تولید کننده در تولید لامپ B موفق تر بوده است.**

٦) کشیدگی

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^4}{\delta^4}$$

*کشیدگی توزیع نرمال ۳ است.

۷)چولگی

پیرسون $\Rightarrow$ $skp = \dfrac{\bar{X} - \text{مد}}{\delta}$

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^3}{\delta^3}$$

توزیع نرمال ;چولگی ندارد $\alpha = 0$

توزیع به طور تقریبی نرمال ; قابل چشم پوشی ; چولگی کم دارد $|\alpha| \langle 0/1$

توزیع چولگی دارد $0/1 \langle \alpha \langle 0/5$

توزیع شدیدا چولگی دارد $|\alpha \langle 0/5|$

- **مثال**

داده های زیر یک نمونه ۵۰ تایی از اندازه نیروی پارگی نخ های کتان می باشد

۲۱/۲،۲۷/۳،۲۰/۶،۲۵/۴،۳۶/۹،۲۸/۳،۳۳/۷،۲۹/۵۳۴/۱،۲۴/۶،۲۷/۱،۲۹/۴،۲۱/۸،۲۷/۵

۲۸/۹،۲۵،۲۱/۹،۳۷/۵،۹/۶،۲۴/۸،۳۲/۷،۲۹/۳،۳۳/۵،۲۲/۲،۲۸/۱،۲۹/۵،۱۷/۳،۲۹/۶،۲۲/۷

۲۵/۴،۳۰/۲،۲۹،۲۶/۸،۳۳/۳،۳۴/۵،۲۳/۹،۳۶/۸،۲۸/۷،۳۳/۲،۲۳/۶،۲۳،۲۹/۲،۳۴/۸،۳۷

۳۸/۴،۲۶/۴،۲۳/۵،۱۸/۶،۲۸/۳،۲۴

الف) محاسبه پارامترهای مرکزی **ب)** محاسبه پارمترهای پراکندگی

- **حل**

x	f_i	F_i	$x_i f_i$	x_i	$f_i \mid x_i-\bar{x}$	$f_i x^2_i$	$(X_i-\bar{x}^3)$
17/25-20/35	2	2	37/6	18/8	18/6	706/8	804/357-
20/35-23/45	7	9	153/3	21/9	43/4	3357/2	238/328-
23/45-26/55	10	19	25	25	31	6250	29/79-
26/55-29/65	17	36	477/7	28/1	0	13423/3	0
29/65-32/75	3	39	93/6	31/2	9//3	2920/3	29/7
32/75-35/85	6	45	205/8	34/3	37/2	7058/9	238/32
35/85-38/95	5	50	187	37/4	46/5	6993/8	804/3
	50		1405		186	40710/5	0

۱) میانگین $x_i = \dfrac{17/25+20/35}{2} = 18/8$, $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i f_i}{n} = \dfrac{1405}{5} = 28/1$

۲) میانه $med = L + \dfrac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \times I$, $med = 26/55 + \dfrac{\frac{50}{2} - 19}{17} \times 3/1 = 27/64$

۳) چارک اول $Q = L + \dfrac{\frac{N}{4} - F_{i-1}}{fi} \times I$, $Q_1 = 23/45 + \dfrac{\frac{50}{4} - 9}{10} \times 3/1 = 24/53$

$$\frac{50}{4}=12/5$$ ⟹ چارک اول

۴) چارک سوم $Q_3=L+\dfrac{\frac{3N}{4}-F_{i-1}}{fi}\times I\ ,\ Q_3=29/65+\dfrac{\frac{3}{4}\times 50-36}{3i}\times 3/1=31/2$

$$\frac{3}{4}\times 50=137/5$$ ⟹ چارک سوم

۵) صدک pام $=L+\dfrac{Np-F_i-1}{f_i}\times I$, $n\times p=۰/۳۱\times ۵=۱۵/۵$

صدک ۳۱ام $=23/45+\dfrac{15/5-9}{10}\times 3/1=25/46$

۶) مد $=L+\dfrac{d_1}{d_1+d_2}\times I$, $26/55+\dfrac{17-10}{7+17-3}\times 3/1=27/58$

۷) متوسط انحرافات $AD=\dfrac{\sum_{i.1}^{k} f_i\left|X_i-\overline{X}\right|}{n}=\dfrac{186}{50}$

۸) واریانس $\delta^2=\dfrac{\sum_{i.1}^{k} f_i X_i^{\ 2}}{n}-\left(\overline{X}\right)^2\ ,\ \delta^2=\dfrac{40710/5}{50}-\left(28/1\right)^2=24/6$

۹) انحراف معیار $\delta=\sqrt{24/6}=4/96$

۱۰) چولگی پیرسون $skp=\frac{\overline{X}-\text{مد}}{\delta}$, $skp=\frac{28/1-27/58}{4/96}=01/04\approx 0/1$

مقدار چولگی کم است.

۱۱) ضریب تغییرات $c.v=\frac{\delta}{\overline{\overline{X}}}$, $c.v=\frac{4/96}{28/1}=0/17$

درصد ضریب تغییرات **٪۰/۱۷×۱۰۰=٪۱۷**

۱۲) چولگی عادی $\alpha_3=\frac{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^3}{\delta^3}$, $\alpha_3=\frac{0}{50\times(4/96)^3}=0$

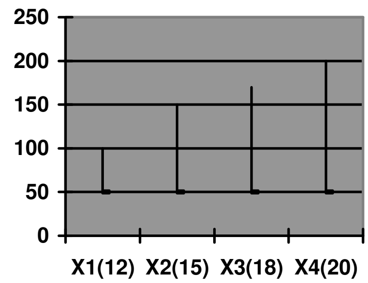
توزیع نرمال ;چولگی ندارد

نمودارهای آماری

۱)میله ای

محور x(افقی)،حور مشاهدات(یا خود مشاهده یا نشان دسته)و محور y(عمودی)،محور فراوانی است.

xi	fi
12	2
15	1
18	2
20	1

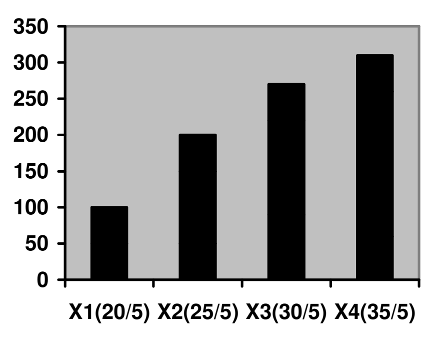


۲)مستطیلی (هیستوگرام)

این نمودار فقط برای داده های طبقه بندی شده به کار می رود.

محورxمحور مشاهدات است(حدود پایین طبقات را روی محورx قرار می دهیم)

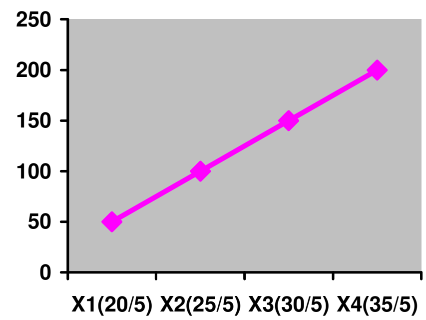
xi	fi
20/5-25/5	2
25/5-30/5	3



۳)چند ضلعی(پلی گون)

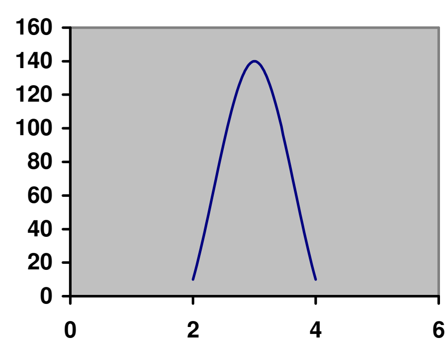
از روی نمودار میله ای ومستطیلی ساخته می شود.

کافی است در نمودار میله ای سر نمودار را به هم وصل کنیم و در نمودار مستطیلی وسط اضلاع را به هم دیگر وصل کنیم.



٤)منحنی فراوانی

در صورتی که تعداد مشاهدات زیاد باشد. تعداد مستطیل ها زیاد می شود و به دنبال آن نمودار پلی گون هم از نقاط شکسته زیادی تشکیل خواهد شد که ظاهر شکل منحنی مانند است.



۵)دایره ای

این نموداربیشتر برای داده های کیفی به کار می رود.

به این ترتیب که نسبت هر مشاهده کیفی را روی دایره نشان مدهد.

$$d_i = \frac{f_i}{n} \times 360$$

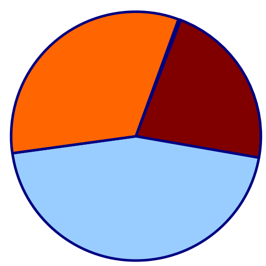
- **مثال**

در کارخانه ای کالاها بر اساس کیفیت توزیع شده اند.

مطلوبست نمودار دایره ای

*صورت سوال

کیفیت	fi	fc	di(درجه)
بد	10	⅛	⅛×360=45
متوسط	30	⅜	⅜×360=135
خوب	40	1÷2	1÷2×360=180
	80		



نارنجی(متوسط)   قرمز(بد)   آبی(خوب)

*

بخش دوم

احتمال

آزمایش جمع آوری داده هایی که پیشامد های آن متفاوتند.

فضای نمونه(S) مجموعه ای است از تمام حالت های ممکن یک آزمایش.

پیشامد ساده(e) تک تک اعضای فضای نمونه را پیشامد ساده می گویند.

پیشامد مرکب(E)مجموعه ای است از تعدادی پیشامد ساده،بزرگترین پیشامد مرکب فضای نمونه است.

آزمایش پرتاب یک سکه S={خ ، ش} E= {خ}

آزمایش پرتاب یک تاس S={۱،۲،۳،۴،۵،۶} E={۱،۳،۵}

آزمایش پرتاب دو سکه S= {(خ ،خ) (ش،ش) (ش،خ) (خ،ش)} E= {(خ ،خ) (ش،ش)}

آزمایش پرتاب سه سکه $S=\left\{ \begin{matrix} \text{(خ خ خ) (ش خ خ) (خ خ ش) (خ ش خ) (ش ش خ) (خ ش ش)} \\ \text{(خ ش ش) (ش خ ش) (ش ش ش)} \end{matrix} \right\}$

$E=\left\{ \text{(ش ش خ) (ش خ خ)} \right\}$

تعداد اعضای فضای نمونه N_s

روش اول

تعداد اعضای فضای نمونه N_s:

- در صورتیکه هر آزمایش دو حالتی باشد. $N_s=2^n$
- در صورتیکه هر آزمایش سه حالتی باشد. $N_s=3^n$
- در صورتیکه هر آزمایش m حالتی باشد. $N_s=m^n$

روش دوم

قاعده ضرب: هرگاه چندین آزمایش پی در پی انجام شود،به طوریکه آزمایش اول به n_1طریق ، آزمایس دوم به n_2 طریق در این صورت فضای نمونه برابر با صورت حاصلضرب

$N_s= n_1\times n_2\times\ldots.$

• **مثال**

در آزمایش پرتاب یک سکه و تاس تعداد فضای نمونه و خود فضای نمونه را بنویسید.

{(خ ۶) (خ ۵) (خ ۴) (خ ۳) (خ ۲) (خ ۱) (ش ۶) (ش ۵) (ش ۴) (ش ۳) (ش ۲) (ش ۱)}

محاسبه احتمال در حل مثال ها

۱)حالتیکه شانس حالات مختلف هر آزمایش مساوی باشد.

e

در آزمایش--------احتمال--------- ؟

E= {----- ------}

$$P(E) = \frac{N_e}{N_s}$$

N_e تعداد اعضای پیشامد مرکب E ، تعداد حالات مساعد

N_s تعداد اعضای فضای نمونه ، تعداد حالات ممکن

• **مثال**

در آزمایش پرتاب یک تاس احتمال اینکه عدد روی وجه حداقل ۴ باشد.

E {۴،۵،۶}

$$P(E) = \frac{N_e}{N_s} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- **مثال**

در آزمایش پرتاب یک تاس احتمال اینکه وجه فرد باشد.

$$P(E)=\frac{N_e}{N_s}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

E $\left\{ ۱،۳،۵ \right\}$

- **مثال**

در آزمایش پرتاب ۲سکه

الف)احتمال اینکه هر دو سکه یک جور بیاید   ب)احتمال اینکه سکه اول همیشه شیر بیاید

الف) $\left\{ \text{(خ خ) (ش ش)} \right\}$

$$P(E)=\frac{N_e}{N_s}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \qquad N_s=2^2=4$$

ب) $\left\{ \text{(خ ش) (ش ش)} \right\}$

$$P(E)=\frac{N_e}{N_s}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

۲)حالتیکه شانس حالات مختلف هر آزمایش مساوی نباشد.

e

در آزمایش--------احتمال--------؟

E= $\left\{ e_۱,e_۲,\ldots.. \right\}$

P(E)=P($e_۱$)+P($e_۲$)+……..

- **مثال**

در خانوادهای ۳ فرزندی در صورتیکه شانس دختر بودن هر فرزند۰/۷باشد.

الف) احتمال اینکه هر سه فرزند یک جنس باشند چقدر است؟

E {(پ پ پ) (د د د)}

P(E)= P(د د د)+ P(پ پ پ)　　۰/۷×۰/۷×۰/۷+ ۰/۳×۰/۳×۰/۳=۰/۳۷

ب) احتمال اینکه حداقل ۲ پسر داشته باشیم؟

E {(پ پ پ) (پ د پ) (پ پ د) (د پ پ)}

P_E=P(د پ پ)+P(پ پ د)+P(پ د پ)+P(پ پ پ)

۰/۳×۰/۳×۰/۷+۰/۷×۰/۳×۰/۳+۰/۳×۰/۷×۰/۳+۰/۳×۰/۳×۰/۳=۰/۲۱

ج) احتمال انکه حداکثر یک پسر داشته باشیم؟

E {(د د د) (پ د د) (د پ د) (د د پ)}

P_E=P(د د پ)+P(د پ د)+P(پ د د)+P(د د د)

۰/۳×۰/۷×۰/۷+۰/۷×۰/۳×۰/۷+۰/۷×۰/۷×۰/۳+۰/۷×۰/۷×۰/۷

• مثال

دو تاس را پرتاب می کنیم در صورتیکه شانس آمدن هر وجه فرد ۲برابر وجه زوج باشد.

الف) احتمال اینکه هر دو تاس یک جور بیا ید.

ب) احتمال اینکه تاس اول عدد یک و تاس دوم بیشتراز۴ باشد.

ج) احتمال اینکه جمع اعداد روی دو تاس حداکثر۴باشد.

۱،۲،۳،۴،۵،۶

۲a+a+۲a+a+۲a+a=۱

۹a=۱ $\quad a=\frac{1}{2}$

P(هر وجه فرد)= $\frac{2}{9}$ $\qquad$ P(هر وجه زوج)= $\frac{1}{9}$

الف)

E{(۱،۱) (۲،۲) (۳،۳) (۴،۴) (۵،۵) (۶،۶)}

P_E=P(۱،۱)+P(۲،۲)+P (۳،۳) +P(۴،۴)+P(۵،۵)+ P(۶،۶)

$$\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{15}{81}$$

ب)

$E\left\{(۱،۵)\ (۱،۶)\right\}$

$P_E = P(۱،۵) + P(۱،۶)$ $\qquad \frac{2}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{6}{81}$

ج)

$E\left\{(۱،۳)\ (۳،۱)\ (۲،۲)\ (۲،۱)\ (۱،۲)\ (۱،۱)\right\}$

$P_E = P(۱،۳) + P(۳،۱) + P(۲،۲) + P(۲،۱) + P(۱،۲) + P(۱،۱)$

$$\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{17}{81}$$

اجتماع و اشتراک پیشامدهای مرکب

- **مثال**

در خانواده ای ۳ فرزندی اگر پیشامد G کمتر از ۲ دختر و H همه از یک جنس باشند.
احتمال $G \cap H$ و $G \cup H$

- **حل**

G{(پ پ پ) (پ د پ) (د پ پ) (پ پ د)}

H { (پ پ پ) (د د د) }

G ∪ H { (د د د) (پ پ پ) (پ د پ) (د پ پ) (پ پ د) }

$$P(G \cup H) = \frac{N_G \cup H}{N_S} = \frac{5}{2^3} = \frac{5}{8}$$

G∩H { (پ پ پ) }

$$P(G \cap H) = \frac{N_G \cap H}{N_S} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

قانون جمع احتمالات

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

قانون متمم

$$P(E) + P(\overline{E}) = 1$$

دو پیشامد ناسازگار

A و B ناسازگارند اگر $A\cap B=\emptyset$ باشد.

در این صورت $P(A\cap B)=0$ و بنابر این

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$$

- **مثال**

۵نفر در کنکور شرکت کنند،احتمال اینکه حداقل یکی از آنها قبول شودچقدر است؟

- **حل**

$$\overline{E}\left\{(\text{ررررر})\right\}$$

$$P(\overline{E})=\frac{N_E}{N_S}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$$

$$P(E)+(\overline{E})=1 \qquad P(E)+\frac{1}{32}=1 \qquad P(E)=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$$

اگر می خواست حداقل رو پیدا کنه خیلی طول می کشید. بنابر این حداکثر رو پیدا کرد که در اون همه کوچکتر از یک می شد. که همه رد بودند و $\overline{E}$ متمم E است.

- **مثال**

در دانشکده پسران به نسبتهای زیر در رشته های ورزشی مختلف فعالیت دارند.

فوتبال ۶۰٪ از تمام پسران ، بسکتبال ۵۰٪ ، فوتبال و بسکتبال هردو۳۰٪

اگر پسری به تصادف انتخاب شود.

الف) فوتبال یا بسکتبال بازی کند(احتمال اینکه حداقل یکی از دو ورزش را انجام دهد)

ب) احتمال اینکه هیچ ورزشی نکند.

- **حل**

فوتبال (f) ۶۰٪ از تمام پسران ← p(f)=۰/۶

بسکتبال(b) ۵۰٪ از تمام پسران ← p(b)=۰/۵

فوتبال و بسکتبال(f∩b) از تمام پسران ← p(f∩b)=۰/۳

الف) $p(f \cup b) = ?$

$$p(f \cup b) = p(f) + p(b) - p(f \cap b)$$

$$p(f \cup b) = 0/6 + 0/5 - 0/3$$

$$p(f \cup b) = 0/8$$

ب) p(E)=?

$\overline{E}$ورزش کند(حداقل یکی از دو ورزش را انجام دهد) $(f \cup b)$

$$P(f \cup b) = P(\overline{E})$$

$$P(\overline{E}) = 0/8$$

$$P(E) + P(\overline{E}) = 1$$

$$P(E) + 0/8 = 1$$

P(E)=۱−۰/۸=P(E)=۰/۲

احتمال شرطی

B A

در آزمایش ______ پیشامد ______ رخ داده احتمال ______؟

$$P(B\vdots A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

- **مثال**

در خانواده ای که سه فرزند دارد فرض کنید معلوم شده است تعداد دختران کمتر از ۲تا است.

احتمال اینکه هر سه فرزند از یک جنس باشند چقدر است؟

الف) شانس پسر بودن ۰/۵ **ب)** شانس دختر بودن ۰/۴

- **حل**

الف) P (پ) = ۰/۵ P(د)=۰/۵

$$P(E\vdots H)=\frac{P(E\cap H)}{P(H)}$$

H {(پ پ پ) (د پ پ) (پ د پ) (پ پ د)}

$$P(H)=\frac{N_H}{N_S}=\frac{4}{2^3}=\frac{1}{2}$$

E∩H {(پ پ پ)}

E {(پ پ پ) (د د د)}

$$P(E\cap H)=\frac{N_E\cap H}{N_S}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$$

$$P(E:H)=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}}=\frac{1}{4}$$

ب) P (پ) = ۰/۶ P(د)=۰/۴

H {(پ پ پ) (د پ پ) (پ د پ) (پ پ د)}

$$P(H)=\frac{N_H}{N_S}=\frac{4}{2^3}=\frac{1}{2}$$

E {(پ پ پ) (د د د)} E∩H {(پ پ پ)}

P(H)= P(پ پ د)+ P(پ د پ) +P(د پ پ)+p (پ پ پ)

۰/۴×۰/۶×۰/۶+۰/۶×۰/۶×۰/۴+۰/۶×۰/۴×۰/۶+۰/۶×۰/۶×۰/۶=۰/۳۶

P(E∩H)=P(پ پ پ)

$$P(E:H)=\frac{0/216}{0/36}=0/6$$

P(E∩H)= ۰/۶×۰/۶×۰/۶=۰/۲۱۶

- **مثال**

در آزمون وکلا از بین ۵ نفر اعلام کردند که حداکثر یک نفر قبول می شود; احتمال اینکه همه در این آزمون رد شوند چقدر است؟

- **حل**

A{ (ررررر) }

B{ (ررق رر) (رق ررر) (ررررر) (ررررق) (ق رررر) (رررق ر) }

A∩B { (ررررر) }

$$P(A:B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{32}}{\frac{6}{32}}=\frac{1}{6} \qquad P(A\bigcap B)=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32} \qquad P(B)=\frac{6}{32}$$

فرمول کاربرد احتمال شرطی

$$P(A\vdots B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\bigcap B)=P(B)\times P(A\vdots B)$$

$$P(B\vdots A)=\frac{P(B\bigcap A)}{P(A)}\Rightarrow P(B\bigcap A)=P(A)\times P(B\vdots A)$$

▒ در صورتیکه دو پیشامد AوB از هم مستقل نباشند به عبارتی به یکدیگر وابسته باشند احتمال اشتراک آنها را از یکی از دو فرمول بالا به دست می آید.

- **مثال**

سه لامپ معیوب به طور غیر عمدی با ۶ لامپ سالم مخلوط شده اند. اگر برای چراغ سقف ۲ لامپ به تصادف انتخاب شود/

الف) احتمال اینکه هر دو سالم باشد؟

ب) احتمال اینکه اولی سالم و دومی معیوب باشد چقدر است؟

ج) احتمال اینکه یکی معیوب و یکی سالم باشد چقدر است؟

- **حل**

۶ لامپ سالم ، ۳ لامپ معیوب = ۹ لامپ

الف)

$$E\left\{\text{(س س)}\right\}$$

$$P(E)=P(\text{س س})=P(\text{اولی س})\times P(\text{دومی س}\,|\,\text{اولی س})=\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}$$

(دومی س) چون از ۶ لامپ سالم یکی را قبلا کم کرده است.

ب)

$$E\left\{\text{(س س)}\right\}$$

$$P(E)=P(\text{س اولی س دومی})=P(\text{اولی س})\times P(\text{دومی م}|\text{اولی س})=\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}$$

ج)

$$E\left\{(\text{س م})\ (\text{م س})\right\}$$

$$P(E)=P(\text{م س})+P(\text{س م})$$

$$P(\text{اولی س})\times P(\text{دومی م}|\text{اولی س})+P(\text{اولی م})\times P(\text{دومی س}|\text{اولی م})$$

$$\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}$$

• مثال

ظرفی حاوی ۵ مهره قرمز و ۷ مهره سفید است. مهره ای را به طور تصادف از ظرف خارج می کنیم و به جای آن ۲ مهره به رنگ دیگر در داخل ظرف می اندازیم و سپس مهره دوم را از ظرف بیرون می آوریم ؛ هر یک از این احتمالات را به دست آورید؟

الف) احتمال اینکه هر دو مهره همرنگ باشد.

ب) احتمال اینکه هر دو مهره سفید باشد در صورتی که بدانیم هر دو همرنگ هستند.

• حل

الف)

P (E)=P(دومی ق|اولی ق)

P(اولی ق) × P (دومی ق|اولی ق) = $\frac{5}{12}\times\frac{4}{13}=0/12$

P (E)=P(دومی س|اولی س)

P(اولی س) × P (دومی س|اولی س) = $\frac{7}{12}\times\frac{6}{13}=0/26$

P(اولی ق) × P (دومی ق|اولی ق)+ P(اولی س) × P (دومی س|اولی س)

$=0/12+0/26=0/38$

ب)

P (E)=P(دومی س|اولی س) =۰/۲۶

P(س س) + P(ق ق)=۰/۳۸

$\frac{0/26}{0/38}=0/68$

جایگشتها

ترتیب(ترتیب مهم است)

راه اول $n \times n-۱ \times \ldots (n-r+۱)$

راه دوم

(انتخاب r شی از n شی) $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

- **مثال**

سه نفر را به چند طریق می توان از بین ۵۰ نفر انتخاب کرد به طوری که روی ۳ صندلی بنشینند.

- **حل**

راه اول ۵۰×۴۹×۴۸

راه دوم

$$P_3^{50} = \frac{50!}{(50-3)!} = \frac{50!}{47!} = \frac{50 \times 49 \times 48 \times 47!}{47!} = 50 \times 49 \times 48$$

- **مثال**

پانزده نفر در یک مسابقه دوچرخه سواری شرکت می کنند.به چند طریق می توان جوایز اول، دوم،سوم را بین افراد شرکت کننده در مسابقه اهدا کرد؟

- **حل**

راه اول ۱۵×۱۴×۱۳

راه دوم

$$P_3^{15}=\frac{15!}{(15-3)!}=\frac{15!}{12!}=\frac{15\times14\times13\times12!}{12!}=15\times14\times13$$

ترکیب(ترتیب مهم نیست)

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r!)}$$

ترکیب انتخاب r شی از n شی

- **مثال**

از بین ۵ مهندس عمران ،۴ مهندس مکانیک چند کمیته ۵ نفری مرکب از ۳ مهندس عمران و ۲ مهندس مکانیک میتوان تشکیل داد؟

- **حل**

$$\binom{5}{3}\times\binom{4}{2}=\frac{5!}{3!\times2!}\times\frac{4!}{2!\times2!}\Rightarrow\frac{5\times4\times3!}{3!\times2}\times\frac{4\times3\times2!}{2\times2!}\Rightarrow10\times6=60$$

- **مثال**

به چند طریق می توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را در یک قفسه چید بطوری که کتاب های سال اول سمت چپ کتاب های دوم باشد؟

- **حل**

$$\binom{5}{3}\times\binom{6}{4}\times 3!\times 4!$$

- **مثال**

درون ظرفی ۳ مهره سیاه و ۲ مهره سفید ، ۴ مهره سبز وجود دارد.از این ظرف ۴ مهره با هم و بدون جایگذاری خارج می کنیم.

الف) احتمال اینکه دو مهره سیاه خارج شده باشد.

ب) احتمال اینکه دو مهره سفید و یک مهره سبز خارج شود.

ج) احتمال اینکه دو تای اول سیاه باشد.

د) احتمال اینکه دو تای اول سفید و آخری سبز باشد.

- **حل**

الف)
$$P(E)=\frac{N_E}{N_S}=\frac{\binom{3}{2}\times\binom{6}{2}}{\binom{9}{4}}\Rightarrow\frac{\frac{3\times 2!}{2!\times 1}\times\frac{6\times 5\times 4!}{2!\times 4!}}{\frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5!}{4!\times 5!}}=\frac{3\times 15}{\frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}}=\frac{15}{42}$$

ب)
$$P(E)=\frac{\binom{2}{2}\times\binom{4}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{9}{4}}$$

ج) $$P(E)=\frac{N_E}{N_S}=\frac{P_2^3\times P_2^6}{P_4^9}\Rightarrow\frac{\frac{3!}{1!}\times\frac{6\times5\times4!}{2!\times4!}}{\frac{9\times8\times7\times6\times5!}{5!}}\Rightarrow\frac{6\times6\times5}{9\times8\times7\times6}=\frac{180}{3024}$$

د) $$P(E)=\frac{P_2^2\times P_1^3\times P_1^4}{P_4^9}\Rightarrow\frac{1\times3\times4}{9\times8\times7\times6}=\frac{1}{252}$$

- **مثال**

یک کمیته مشورتی که درباره اصلاح وضع زندان ها مطالعه می کند مرکب از ۱۵ عضو است.درباره برنامه خاصی ۹ نفر موافق، ۴ نفر مخالف و ۲ نفر بی طرف هستند.

خبرنگاری علاقه مند است ۳ نفر را به طور تصادفی از این کمیته برگزیند.

الف)احتمال اینکه دو نفر اول موافق و نفر سوم مخالف باشند.

ب) احتمال اینکه دو نفر مخالف و یک نفر موافق باشند.

ج) احتمال اینکه هر سه نفر موافق باشند.

د) احتمال اینکه هر سه نفر بیطرف باشند.

ه) احتمال اینکه حداقل دو نفر موافق برنامه باشند چقدر است.

- **حل**

الف) $$P(E)=\frac{\binom{9}{2}\times\binom{4}{1}}{\binom{15}{3}}=\frac{\frac{9!}{7!}\times\frac{4!}{3!}}{\frac{15!}{12!}}$$

ب) $$P(E)=\frac{N_E}{N_S}=\frac{\binom{4}{2}\times\binom{9}{1}}{\binom{15}{3}}\Rightarrow\frac{\frac{4!}{2!(2!)}\times\frac{6\times5\times4!}{1!\times(8!)}}{\frac{15!}{3!\times12!}}=$$

ج) $P(E)=\frac{N_E}{N_S}=\frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}} \Rightarrow or \frac{P_3^9}{P_3^{15}}$

د) $P(E)=\frac{N_E}{N_S}=0$

ه) به طور کلی آزمایشهایی که از هم مستقل نباشند یعنی به هم وابسته باشند (استخراج بدون جایگذاری)را می توان به ۲ طریق حل کرد

۱) از راه فرمول کاربرد احتمال شرطی $P(A\cap B)=p(A)\times P(B|A)$

۲)از راه $P(E)=\frac{N_E}{N_S}$ که N_E و N_S را می توان با توجه به مسئله از فرمول های ترتیب و ترکیب استفاده کرد.

انتخاب ۳ نفر (احتمال حداقل ۲ نفر موافق و نفر سوم مخالف نباشد)

۹ موافق، ۴ مخالف، ۲ بی طرف = ۱۵ نفر

راه اول

P(حداقل ۲ نفر موافق) =P(۲ نفرموافق)+P(۳ نفر موافق)

$$\frac{\binom{9}{2}\binom{4}{1}}{\binom{15}{3}}+\frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}}$$

$$\frac{\dfrac{\frac{9\times8\times7!}{2!7!}\times\frac{4\times5!}{1!5!}}{\frac{15\times14\times13\times12!}{3\times12!}}}{}+\frac{\dfrac{\frac{9\times8\times7\times6!}{3!6!}}{\frac{15\times14\times13\times12!}{3!2!}}}{}\Rightarrow\frac{3\times9\times8\times4}{15\times14\times13}+\frac{9\times8\times7}{15\times14\times13}=\frac{3\times9\times8\times4+9\times8\times7}{15\times14\times3}$$

راه دوم

E {(موافق موافق موافق) (موافق مخالف موافق) (موافق موافق مخالف) (مخالف موافق موافق)}

P(موافق موافق موافق)+P(موافق مخالف موافق)+P(موافق موافق مخالف)+P(مخالف موافق موافق)

$$=\frac{9}{15}\times\frac{8}{14}\times\frac{4}{13}+\frac{4}{15}\times\frac{9}{14}\times\frac{8}{13}+\frac{9}{15}\times\frac{4}{14}\times\frac{8}{13}+\frac{9}{15}\times\frac{8}{14}\times\frac{7}{13}=\frac{3\times9\times8\times4+9\times8\times7}{15\times14\times13}$$

۱۳×۱۴×۱۵ مخرج مشترک گرفته است.

• مثال

فرض کنیم ۶ کارت وجود دارد که شماره های ۶تا۱ روی آنها نوشته شده با قرار دادن این کارتها به ترتیبهای مختلف شماره های ۶ رقمی ساخته می شود.

الف) احتمال اینکه این عدد ۶ رقمی زوج باشد.

ب) احتمال اینکه بزرگتر از ۳۰۰ باشد. (در صورتی که عدد سه رقمی باشد)

• حل

الف)

۵×۴×۳×۲×۱=N_E=۳۶۰

$$P(E) = \frac{N_E}{N_S}$$

$$P(E) = \frac{360}{6!}$$

$$P(E) = \frac{1}{2}$$

ب)

۱ × ۱× ۵ =۵ ۳۰۰

۲۰+۵=۲۵

۱ × ۵ ×۴ =۲۰ ۳۱۰

---

n* نفر به !n طریق کنار هم می نشینند.

n* نفر به (!n-۱) طریق می توانند دور یک میز بنشینند.

- **مثال**

۳ نفر به چند طریق می توانند دور یک دایره بنشینند؟

- **حل**

(۳-۱)! طریق یعنی ۲!

- **مثال**

به چند طریق می توان ۵ نفر را دور یک میز نشاند به طوری که دو نفر خاص همیشه کنار هم باشند؟

- **حل**

$(۴-۱)!\times ۲!=۳!\times ۲!$

- **مثال**

به چند طریق می توان ۳ ایرانی،۴ آلمانی و ۲ انگلیسی را کنار هم قرارداد به طوری که هم ملیت ها کنار هم بنشینند؟

- **حل**

$۳!\times ۲!\times ۴!\times ۳!$

* n شی داریم که به k گروه تقسیم شده اند ، به طوری که r_1 شی مثل هم، r_2 شی مثل هم،......
و r_k شی مثل هم باشند.تعداد کل حالات قرار گرفتن n شی به صورت زیر می باشد

$$\frac{n!}{r_1!r_2!.....r_k!}$$

- **مثال**

چند علامت مختلف که هر کدام شامل ۱۲ پرچم که در یک خط راست قرار گرفته و شامل ۴ پرچم سبز، ۵ پرچم قرمزو۳پرچم سفید می باشد.
می توان تهیه نمود که پرچمهای همرنگ یکسان هستند؟

- **حل**

$$\frac{12!}{4!3!5!}$$

- **مثال**

چند کلمه سه حرفی با حروف کلمه کتاب می توان نوشت. به طوریکه

الف) تکرارحروف مجازنباشد. **ب)** تکرارحروف مجازباشد.

- **حل**

الف) $P_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4\times3\times2\times1$

ب) $\frac{\times}{4}\frac{\times}{4}\frac{\times}{4} = 4^3$

تحلیل بیز

$$P(C_k \vdots E) = \frac{P(C_k)\times P(E\vdots C_k)}{P(C_1)\times P(E\vdots C_1)+P(C_2)\times P(E\vdots C_2)+......+P(C_k)+P(E\vdots C_k)}$$

- **مثال**

فرض کنید از نیروی کار جامعه ای ۴۰٪ فارغ تحصیل دبستان(رده $C_۱$)،۵۰٪ فارغ تحصیل دبیرستان($C_۲$) و ۱۰٪ فارغ التحصیل دانشکده($C_۳$) باشند.

در بین فرغ التحصیلان دبستان ۱۰٪ بیکار ، در بین دبیرستانی ها ۵٪ بیکارند و در بین دانشکده ها ۲٪ بیکارند. اگر از نیروی کار فردی به تصادف انتخاب شود:

الف) احتمال اینکه بیکار باشد.

ب) اگر فرد انتخاب شده بیکار باشد احتمال اینکه او فارغ التحصیل دانشکده باشد.

- **حل**

P($C_۱$)=۴۰٪ فارغ التحصیل دبستان ← ۱۰٪ بیکار P(E|$C_۱$) =٪۱۰

P($C_۲$)=۵۰٪ فارغ التحصیل دبیرستان ← ۵ ٪ بیکار P(E|$C_۲$) =٪۵

P($C_۳$)=۱۰٪ فارغ التحصیل دانشکده ← ۲٪ بیکار P(E|$C_۳$) =٪۲

بیکار=E

الف)

$$P(E)=P(E\bigcap C_1)+P(E\bigcap C_2)+P(E\bigcap C_3)$$
$$P(C_1)\times P(E\vdots C_1)+P(C_2)\times P(E\vdots C_2)+P(C_3)\times P(E\vdots C_3)$$
$$0/4\times 0/1+0/5\times 0/05+0/1\times 0/02=0/067$$

ب)

$$P(C_3\vdots E)=\frac{P(C_3\bigcap E)}{P(E)}=\frac{P(C_3)\times P(E\vdots C_3)}{P(E)}=\frac{0/1\times 0/02}{0/067}=0/029$$