فصل چهارم

حد و پیوستگی

تعریف حد

گوییم تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای حدی معادل ℓ است، هرگاه استلزام منطقی زیر برقرار باشد.

$$\boxed{\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \;;\; 0<|x-a|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-L|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x)=L}$$

به همین ترتیب، می‌توان استلزام‌های منطقی برای حدود چپ و راست بیان نمود:

برای حد راست داریم:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \,;\, 0<x-a<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \,;\, 0<a-x<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

مثال: اگر به ازای هر x که $\delta>|x-1|$ آنگاه $\left|\frac{2x^2+x}{x}-3\right|<\frac{1}{5}$ در این صورت مقدار δ را به‌دست آورید؟

حل:

$$\left|\frac{2x^2+x}{x}-3\right|<\frac{1}{5} \Rightarrow \left|\frac{2x^2+x-3x}{x}\right|<\frac{1}{5} \Rightarrow \left|\frac{2x^2-2x}{x}\right|<\frac{1}{5} \Rightarrow |2|\,|x-1|<\frac{1}{5} \Rightarrow |x-1|<\frac{1}{10}$$

بنابراین داریم: $\delta=\frac{1}{10}$

توجه: می‌گویند تابع $f(x)$ در نقطه x_0 دارای حد است هرگاه، در این نقطه دارای حد چپ و راست باشد و این دو حد با هم برابر باشند یعنی: $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)$

می گویند تابع $f(x)$ در نقطه x_0 پیوسته است هرگاه: $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

مثال: پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x=0$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{[x^2]}{x} & x<0\\ \left[\cos\dfrac{\pi}{2}(x+1)\right] & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{[x^2]}{x}=\frac{[\text{عدد مثبت بی‌نهایت کوچک}]}{-\varepsilon}=\frac{\text{صفر واقعی}}{-\varepsilon}=0$$

(با توجه به این نکته که می‌دانیم: اگر صفر واقعی = $\lim_{x\to a} f(x)$ باشد و $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ باشد بدون هیچ ابهامی داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\cos\frac{\pi}{2}(x+1)\right]=\left[\cos\frac{\pi^+}{2}\right]=[\text{عدد منفی بی‌نهایت کوچک}]=-1$$

$$f(0)=0$$

لذا تابع $f(x)$ در نقطه $x=0$ پیوسته نمی باشد ولی از چپ پیوستگی دارد.

مثال: پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x=0$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-|x|}{x} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-x}{x}=\frac{\text{صفر واقعی}}{+\varepsilon}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x}=2$$

$$f(0)=2$$

بنابراین تابع موردنظر در نقطه $x=0$ پیوستگی چپ دارد.

مثال: تابع $f(x)=[x-1]+[-x]$ به ازای کدام مقادیر x ناپیوسته است؟

الف) تمام مقادیر x به جز صفر
ب) فقط در صفر
ج) تمام مقادیر صحیح و مثبت
د) تمام مقادیر صحیح

حل: با توجه به آن‌که:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}-1 & x\notin z\\ 0 & x\in z\end{cases}$$

لذا چناچه x_0 یک عدد صحیح باشد داریم:

$$\lim_{x\to x_0} = \lim\left([x]+[-x]\right)-1=-2$$
$$f(x_0)=[x_0]+[-x_0]-1=-1$$

یعنی تابع $f(x)$ در تمام مقادیر صحیح x ناپیوسته می‌باشد.

مثال: نقاط گسستگی تابع $f(x)=\frac{1}{1-[|x|]}$ را بیابید.

حل: بدیهی است که صفرهای مخرج کسر، نقاط گسستگی تابع فوق می‌باشند. داریم:

$$1-[|x|]=0 \Rightarrow [|x|]=1 \Rightarrow 1\le |x|<2 \Rightarrow \begin{cases} 1\le x<2 \\ -2<x\le -1 \end{cases}$$

مثال: حاصل حد چپ و حد راست تابع $f(x)=\frac{[x^2-4]}{[x]^2-4}$ را در مجاورت نقطه $x=2$ به‌دست آورید.

حل: می‌دانیم:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{[x^2-4]}{[x]^2-4}=\frac{[\varepsilon^+]}{\text{صفر واقعی}}=\frac{\text{صفر واقعی}}{\text{صفر واقعی}}$$

دقت کنید صورت و مخرج هر دو صفر واقعی هستند، لذا به‌واسطه صفر شدن مخرج، حد راست اساساً موجود نمی‌باشد.

در بررسی حد چپ داریم:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{[x^2-4]}{[x]^2-4}=\frac{-1}{1-4}=+\frac{1}{3}$$

مثال: چه تعدادی از نقاط ناپیوستگی تابع $y=[\sin^2 x]$ دربازه $(-2,2)$ قرار دارد؟

حل: می‌دانیم:

$$\forall x\in \mathbf{R}\ ,\ 0\le \sin^2 x\le 1$$

بنابراین تابع موردنظر تنها درنقاطی که x $\sin^2 x$ معادل یک باشد ناپیوسته خواهد بود، زیرا در بقیه نقاط که x $\sin^2 x$ مخالف یک است، مقدار تابع y برابر صفر می‌باشد.

لذا نقاط ناپیوستگی تابع عبارت‌اند از:

$$\sin^2 x=1 \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{2}=\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots$$

و ملاحظه می‌شود که تنها دو نقطه یعنی نقاط $\pm\frac{\pi}{2}$ در بازه مذکور قرار دارند.

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{x-5} & x\in \mathbf{Q} \\ \frac{x}{2x^2+1} & x\notin \mathbf{Q} \end{cases}$ در چند نقطه گویا پیوسته است؟

حل: چنانچه تابع مزبور در عدد گویایی مثل x_0 پیوسته باشد باید داشته باشیم:

$$\frac{2}{x_0-5}=\frac{x_0}{2x_0^2+1} \Rightarrow 3x_0^2+5x_0+2=0 \Rightarrow x_0=-1, \frac{-2}{3}$$

پس ملاحظه می‌شود تابع مزبور در 2 نقطه گویا پیوسته می‌باشد.

تذکر: اگر توابع g , f در نقطه $x=a$ پیوسته باشند، مجموع، تفاضل، ضرب و تقسیم آنها (در صورت تعریف شدن) پیوسته است.

تذکر: اگر یکی از توابع f و یا g در $x=a$ ناپیوسته باشد، مجموع و تفاضل آنها ناپیوسته ولی ضرب و تقسیم آنها ممکن است پیوسته باشد.

تذکر: اگر توابع g , f در نقطه $x=a$ ناپیوسته باشند، در مورد مجموع ، تفاضل ، ضرب و تقسیم آنها اظهارنظر قطعی نمی‌توان کرد.

تذکر: تابع f به معادله $f(x)=\dfrac{ax^n+bx^{n-1}+\dots}{a'x^m+b'x^{m-1}+\dots}$ ، اگر مخرج ریشه نداشته باشد در R پیوسته است.

تذکر: تابع $f(x)=[ax]$ اگر $a>0$ باشد در نقاطی که ax عدد صحیح باشد، فقط پیوستگی راست و اگر $a<0$ باشد در نقاطی که ax عدد صحیح است، فقط پیوستگی چپ دارد.

مثال: در تابع $f(x)=2\operatorname{sgn}\left(x^2\right)-3\operatorname{sgn}(x)$ مجموع حد چپ و راست تابع در نقطه $x=0$ کدام است؟

الف) 0   ب) 2   ج) 4   د) 6

حل: می‌دانیم که در مورد تابع $\operatorname{sgn}(x)$ داریم:

$$\operatorname{sgn}(x)\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

و لذا داریم:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=2(1)-3(1)=-1$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=2(1)-3(-1)=5$$

پس جواب موردنظر $-1+5=4$ خواهد بود.

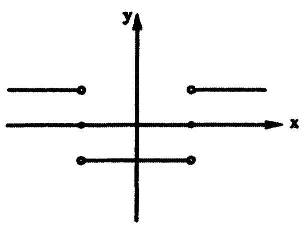
مثال: مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\operatorname{sgn}\left(x^2-1\right)$ را بیابید.

حل: با توجه به تعریف تابع $f(x)=\operatorname{sgn}(u(x))$، این تابع زمانی ناپیوسته می‌شود که $u(x)=0$ شود. بنابراین داریم:

$$x^2-1=0\rightarrow x=\pm 1$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+1\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-1\\ f(1)=0\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-1\\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+1\\ f(-1)=0\end{cases}$$

شکل تابع به صورت زیر است:



قاعده هوپیتال:

هرگاه در محاسبه حد $I=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ به یکی از صور مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ برخورد کنیم، می‌توان حاصل حد را به صورت زیر به‌دست آورد:

$$I=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

چنانچه مجدداً به حالت مبهم برخورد کنیم، می توان مجدداً از قاعده هوپیتال استفاده کرد تا رفع ابهام نهایی حاصل گردد.

یادآوری: در این قسمت چند نمونه از فرمولهای مشتق که در استفاده از قاعده هوپیتال مفید می‌باشند مطرح می‌شود.

تابع	مشتق
$y=u^n$	$y'=nu'\,u^{n-1}$
$y=a^u$	$y'=u'a^u\ \mathrm{Lna}$
$y=\log_a^u$	$y'=\frac{u'}{u}\,\frac{1}{\ln a}$
$y=\sin u$	$y'=u'\cos u$
$y=\cos u$	$y'=-u'\sin u$
$y=\tan u$	$y'=u'\left(1+\tan^2 u\right)$
$y=\mathrm{Arc}\sin u$	$y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y=\mathrm{Arc}\cos u$	$y'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y=\mathrm{Arc}\tan u$	$y'=\frac{u'}{1+u^2}$
$y=\sinh u$	$y'=u'\cosh u$
$y=\cosh u$	$y'=u'\sinh u$
$y=\tanh u$	$y'=u'\left(1-\tanh^2 u\right)$

مثال: حاصل حد زیر را به‌دست آورید.

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(x^2+x-1\right)}{xe^x-e}$$

حل:

$$I=\frac{\ln(1+1-1)}{1e^1-e}=\frac{0}{0}\quad \text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{H} I=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x+1}{x^2+x-1}}{e^x+xe^x}=\frac{\frac{3}{1}}{e+e}=\frac{3}{2e}$$

مثال: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{k^{e^x}-k}{k^x-1}$ را با شرط $(k\neq 1\ ,\ k>0)$ به‌دست آورید.

حل:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{k^{e^x}-k}{k^x-1}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{H} I=\lim_{x\to 0}\frac{e^x k^{e^x}\ln k}{k^x\ln k}=k$$

مثال: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x^2-\cosh x^2}{x^4}$ را به‌دست آورید.

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2-\cosh x^2}{x^4}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{H} I=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\sin x^2-2x\sinh x^2}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2+\sinh x^2}{-2x^2}$$

با توجه به هم‌ارزی های $\underset{u\to 0}{\sin u}\sim u\ ,\ \underset{u\to 0}{\sinh u}\sim u$ داریم:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^2}{-2x^2}=-1$$

مثال: حاصل حد $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\operatorname{Arc}\cos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$I=\lim_{x\to 1^-}\frac{\operatorname{Arc}\cos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{H}$$

$$I=\lim_{x\to 1^-}\frac{\dfrac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}}{\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1+x}}{2x\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال: اگر $\lim\limits_{x\to -3}\frac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}}=2$ باشد. مطلوب است محاسبه a.

حل: حد مذکور باید مبهم به صورت $\frac{0}{0}$ باشد با استفاده از قضیه هوپیتال به‌دست می‌آید:

$$I=\lim_{x\to -3}\frac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{H} I=\lim_{x\to -3}\frac{a}{-\frac{5}{2\times\sqrt{5x+16}}}=\frac{a}{\frac{-5}{2}}=\frac{-2a}{5}$$

اما از آنجا که طبق فرض داریم $I=2$ لذا نتیجه می‌شودکه $a=-5$.

مثال: حاصل حد $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^3-\left[x^3\right]}{x-3}$ را به‌دست آورید.

حل: وقتی $x\to 3^+$ داریم $\left[x^3\right]=27$ لذا هدف محاسبه حد زیر خواهد بود:

$$I=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^3-27}{x-3}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{H} I=\lim_{x\to 3^+}\frac{3x^2}{1}=27$$

قاعده مشتق گیری از انتگرال (قضیه لایپنیتز):

یادآوری: فرض کنید $\alpha(x)$, $\beta(x)$ دو تابع دلخواه از x باشند. چنانچه داشته باشیم:

$$f(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} h(x,t)\,dt$$

می توان ثابت کرد:

$$\boxed{\frac{df}{dx}=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x}h(x,t)\right)dt+\beta'(x).h(x,\beta(x))-\alpha'(x).h(x,\alpha(x))}$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{\int_{x}^{x^2}\frac{e^t}{t}dt}{\int_{2}^{x+1}e^{t^2}dt}$$

مثال: مبهم $I=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\int_{1}^{1}\frac{e^t}{t}dt}{\int_{2}^{2}e^{t^2}\ dt}=\frac{0}{0}$

$$H:I=\lim_{x\to 1}\frac{0+2x.\frac{e^{x^2}}{x^2}-\frac{e^x}{x}}{0+e^{(x+1)^2}-0}=\frac{2e^1-e}{e^4}=e^{-3}$$

مثال: مقادیر b , a را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt=1$$

حل:

$$\lim_{x\to 0}I=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{H}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b-\cos x}=\frac{0}{b-1}$$

چون قرار است حاصل برابر 1 شود پس باید:

$$b-1=0\to b=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+x}}\times\frac{x^2}{1-\cos x}\xrightarrow{H}\lim\frac{1}{\sqrt{a}}\times\frac{2x}{\sin x}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\frac{1}{\sqrt{a}}\times\frac{2}{1}=1\to a=4$$

مشتق گیری از تابع مرکب:

اگر $f(x), g(x)$ دو تابع دلخواه از x باشند می‌توان نشان داد:

$$y=fog(x)=f(g(x))\Rightarrow y'=g'(x).f'(g(x))$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2+x+1)+f(2x+1)-2f(3)}{x^3-1}$$

حل:

$$I=\frac{f(3)+f(3)-2f(3)}{1-1}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{H}$$

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)\ f'\left(x^2+x+1\right)+2\ f'(2x+1)}{3x^2}=\frac{3f'(3)+2f'(3)}{3}=\frac{5}{3}\ f'(3)$$

مشتق‌گیری از $y=f(x)^{g(x)}$:

یادآوری: اگر $g(x),f(x)$ دو تابع از x باشند و داشته باشیم $y=f(x)^{g(x)}$ ، برای محاسبه y' می‌توان نوشت:

$$\ln y=g(x)\ln(f(x))$$

$$\frac{y'}{y}=g'(x).\ln(f(x))+g(x).\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$y'=\left(g'(x).\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).\ f(x)^{g(x)}$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)^{x^2}-2}{x^2-1}$$

حل:

$$I=\frac{(1+1)^1-2}{1^2-1}=\frac{0}{0}\qquad \text{مبهم}$$

ابتدا مشتق تابع $y=(x+1)^{x^2}$ را حساب می‌کنیم و بعد با استفاده قاعده هوپیتال به رفع ابهام حد مورد نظر می‌پردازیم.

با فرض $y=(x+1)^{x^2}$ داریم:

$$\ln y=x^2\ln(x+1)$$

$$\frac{y'}{y}=2x\ln(x+1)+x^2\frac{1}{1+x}$$

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{\left(2x.\ln(x+1)+x^2\frac{1}{x+1}\right)(x+1)^{x^2}}{2x}=\frac{\left(2\ln 2+\frac{1}{2}\right)(2)^1}{2(1)}=2\ln 2+\frac{1}{2}$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر $I=\lim\limits_{x\to+\infty}(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$:

حل: با فرض $y=(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$ داریم:

$$\ln y=\frac{1}{x}\ln(\cosh x)\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(\ln y)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\ln(\cosh x)\right)=\frac{\infty}{\infty}\ \text{مبهم}$$

با توجه به اینکه می‌دانیم $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ و $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ داریم:

$$\xrightarrow{H}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sinh x}{\cosh x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1\Rightarrow y=e$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to0^+}(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

حل: با فرض $y=(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$ داریم:

$$\ln y=\frac{1}{\ln x}\ln\sin x\Rightarrow\lim_{x\to0}(\ln y)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(\sin x)}{\ln(x)}\right)=\frac{\infty}{\infty}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{H}$$

با توجه به هم‌ارزی $\underset{u\to0}{\sin u}\sim u$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x}{x}=1\Rightarrow y=e$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\tan x)^{\cos x}-1}{x-\frac{\pi}{4}}$$

حل:

$$I=\frac{1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-1}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

با فرض $y=\tan x^{\cos x}$ داریم:

$$\xrightarrow{H}I=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{y'}{1}$$

$$y=\tan x^{\cos x}\to\ln y=\cos x\ln(\tan x)\to\ \text{مشتق}\ \to\frac{y'}{y}=(-\sin x)(\ln(\tan x))+(\cos x)\left(\frac{1+\tan^2x}{\tan x}\right)$$

در $x=\frac{\pi}{4}$ داریم:

$$\frac{y'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{y\left(\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.\ln(1)+\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1+1}{1}\to y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

$$I=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}y'=\sqrt{2}$$

نکته: بسیاری از حدهای مبهم به فرم $\infty-\infty$ یا $0\times\infty$ را می‌توان به سادگی به یکی از حالات $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کرد و با اعمال قاعده هوپیتال به رفع ابهام آنها پرداخت.

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$$

حل:

$$I=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)=\infty-\infty \quad \text{مبهم}$$

با استفاده از قاعده هوپیتال و هم‌ارزی $\left(\tan u \underset{u\to 0}{\sim} u\right)$ داریم:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2}\xrightarrow{H} I=\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=0$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

حل: می‌توان نوشت:

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\frac{0}{0}\quad \text{مبهم}\quad \xrightarrow{H}\ \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+(x-1)\times\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}\quad \text{مبهم}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}\xrightarrow{H}\ =\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{2n+1}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}\right)$$

حل: $I=\infty-\infty$ مبهم

با توجه به این هم‌ارزی که داریم:

$$\sqrt[k]{n+a}\underset{n\to\infty}{\sim}\sqrt[k]{n}$$

$$I=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{2n+1}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right).\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{2n+1}\,.\,\frac{(n+2)-(n+3)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+1}\right)\times(-1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}\ \text{هم ارزی}\ \to=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{2n}\right)\times(-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-\sqrt{2}\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید. می‌دانیم به ازای $x=0$ داریم $y=0$ مطلوب است حاصل حد:

$$y'=\frac{x}{x^2y+y^3}\qquad\qquad I=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y^2}$$

حل:

$$I=\lim_{x\to 0,\,y\to 0}\frac{x^2}{y^2}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{\text{هوپیتال}} I=\lim_{x\to 0,\,y\to 0}\frac{2x}{2yy'}=\lim\frac{x}{y\times\frac{x}{x^2y+y^3}}$$

$$=\lim\frac{x}{\frac{x}{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0,\,y\to 0}x^2+y^2=0$$

هم‌ارزی‌ها

تعریف هم‌ارزی: هرگاه $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ و نیز داشته باشیم:

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ ، آنگاه می‌گوییم دو تابع $g(x), f(x)$ در نقطه x_0 هم‌ارزند و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\sim \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

به بیان ساده‌تر زمانی که x به سمت نقطه x_0 میل می‌کند $(x\to x_0)$ می‌توان از تابع $g(x)$ بجای تابع $f(x)$ استفاده کرد و مساله را حل نمود (و یا می‌توان از $f(x)$ بجای $g(x)$ استفاده نمود). البته در استفاده از قاعده هم‌ارزی ذکر این نکته ضروری است، که هرگاه در مساله‌ای از یک قاعده هم‌ارزی استفاده کردیم و هم‌ارز عبارتی را نوشتیم، چنانچه در کنار این عبارت دقیقاً قرینه آن وجود داشته باشد، استفاده از قاعده هم‌ارزی حاصل در مساله مجاز نمی‌باشد.

در ادامه تعدادی از قضایای هم‌ارزی که در حل مسایل کمک زیادی می‌کنند معرفی می‌گردد.

هم‌ارزی‌های مثلثاتی:

هرگاه $A(x)\to 0$ آنگاه می‌توان نوشت:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin A(x)\sim A(x)\\ \tan A(x)\sim A(x)\\ \sin^{-1} A(x)\sim A(x)\\ \tan^{-1} A(x)\sim A(x)\end{array}}$$

وقتی $A(x)\to 0$ میل می‌کند داریم:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin A(x)\sim A(x)-A^3(x)/6\\ \tan A(x)\sim A(x)+A^3(x)/3\\ \operatorname{Arc}\sin A(x)\sim A(x)+A^3(x)/6\\ \operatorname{Arc}\tan A(x)\sim A(x)+A^3(x)/3\\ \cos(A(x))\sim 1-\dfrac{A^2(x)}{2}\end{array}}$$

هم‌ارزی جزء صحیح‌ها:

در مورد جزء صحیح‌ها وقتی که $A\to\infty$ میل می کند داریم:

$$\boxed{[A]\sim A}$$

رابطه برنولی: روابط زیر، به روابط برنولی موسوم‌اند، وقتی $A(x)\to 0$ میل می‌کند داریم:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sqrt[m]{1+A(x)}\sim 1+\dfrac{1}{m}A(x)\\ (1+A(x))^m\sim 1+mA(x)\end{array}}$$

هم‌ارزی نیوتن:

رابطه زیر به هم‌ارزی نیوتن موسوم است. وقتی $x \to \infty$ میل می‌کند داریم:

اگر p زوج باشد	$\sqrt[p]{ax^p + bx^{p-1} + \ldots} \sim \sqrt[p]{a}\left\lvert x + \frac{b}{pa}\right\rvert$
اگر p فرد باشد	$\sqrt[p]{ax^p + bx^{p-1} + \ldots\ldots} \sim \sqrt[p]{a}\left(x + \frac{b}{pa}\right)$

هم‌ارزی‌های جبری:

وقتی $x \to 0$ هر کثیرالجمله‌ای از x ، هم‌ارز با کوچکترین درجه x در آن جمله می‌باشد.

برای مثال:

$$\underset{x \to 0}{x^5 - x^4 - x^2 \sim -x^2}$$

وقتی $x \to +\infty$ هرکثیرالجمله‌ای از x ، هم‌ارز با بزرگترین درجه x در آن جمله است.

برای مثال:

$$\underset{x \to +\infty}{x^5 - x^4 - x^2 \sim x^5}$$

مثال: مقادیر حدهای زیر را بیابید.

$$1)\ \lim_{x \to 0} \frac{3x + \tan 2x}{2x - \tan^{-1} x} = \frac{0}{0} \to \lim_{x \to 0} \frac{3x + 2x}{2x - x} = 5$$

$$2)\ \lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \lim \frac{x - x}{x^3}$$

دقت شود که نمی‌توان از قاعده هم‌ارزی $\tan x \sim x$ استفاده کرد. چون طبق نکته بالا بعد از نوشتن هم‌ارزی، قرینه آن دقیقاً در کنار آن وجود دارد.

راه‌حل اول: از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x^3} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 - (1 + \tan^2 x)}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\tan^2 x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{3x^2} = \frac{-1}{3}$$

راه حل دوم: راه‌حل ساده‌تر استفاده از هم‌ارزی $\tan x - x \sim \frac{x^3}{3}$ (وقتی $x \to 0$ میل می‌کند) می‌باشد.

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{-x^3} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} I = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{3}}{x^3} = -\frac{1}{3}$$

$$3)\ I = \lim_{x \to 0} (\sin 2x - x) \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{x}\right]$$

طبق قاعده هم‌ارزی $\underset{f(x) \to \infty}{[f(x)] \sim f(x)}$ داریم:

$$\text{هم‌ارزی} \to L = \lim_{x \to 0} (2x - x) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{x}\right) = \sqrt{3}$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\ .\sin^2 x}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)(\sin x+x)}{x^2\sin^2 x}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to 0}\frac{(x+x)(\sin x-x)}{x^2\times x^2}=\frac{(2x)\left(\frac{-x^3}{6}\right)}{x^4}=-\frac{1}{3}$$

$$5)\ \lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)=\infty-\infty\ \text{مبهم}$$

طبق قاعده هم‌ارزی نیوتن داریم:

$$\longrightarrow \lim_{x\to\infty}\left(x-\left|x+\frac{1}{2}\right|\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)=-\frac{1}{2}$$

$$6)\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

با استفاده از قاعده هم‌ارزی $\left(\left(\underset{x\to 0}{1-\cos x}\right)\sim\frac{x^2}{2}\right)$ داریم:

$$\longrightarrow=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{|x|}{\sqrt{2}}}$$

بنابراین باید دو حالت را در نظر گرفت:

$$\begin{cases}\text{حد راست}\quad=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}(x)}=\sqrt{2}\\[2ex]\text{حد چپ}\quad=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}(-x)}=-\sqrt{2}\end{cases}$$

لذا چون حد چپ و راست با هم برابر نیستند، حد مزبور موجود نیست.

$$7)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{1-(1+x)^5}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

طبق هم‌ارزی برنولی داریم:

$$\longrightarrow=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{3}x-1}{1-(1+5x)}=\frac{\frac{1}{3}x}{-5x}=\frac{-1}{15}$$

$$8)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$$

می‌دانیم که مجموع مقابل یک تصاعد حسابی است. پس می‌توان نوشت:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}\longrightarrow=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

$$9)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{\operatorname{Arc}\sin x^4}=\frac{0}{0}$$ مبهم

با توجه به قاعده‌های هم‌ارزی $\left(\underset{x\to 0}{\operatorname{Arc}\sin x\sim x}\right)$, $\left(\underset{x\to 0}{1-\cos x\sim \frac{x^2}{2}}\right)$ می‌توان نوشت:

$$\longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{x^4}=\frac{1}{8}$$

مثال: حاصل حد $I=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$ را به‌دست آورید.

$$I=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right).\left(\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+}}}+\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

با استفاده از قاعده هم‌ارزی می‌توان نوشت:

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

نکته: مرتبه بی‌نهایت:

در محاسبه بسیاری از حدها دانستن مرتبه بی‌نهایت‌های موجود در مساله، تحلیل آن را بسیار ساده می‌کند. لذا در رابطه با برخی بی‌نهایت‌ها و شدت و ضعف آنها نسبت به یکدیگر، بجاست موارد زیر بیان شود:

۱) از نظر شدت و مرتبه بزرگی بی‌نهایت‌ها وقتی $x\to+\infty$ به ترتیب داریم:

$$\boxed{x^x >> x! >> a^x >> x^b >> \ln x}$$

(که در اینجا b عدد مثبت حقیقی و $a>1$ است).

۲) وقتی $x\to+\infty$ و داشته باشیم $a>b>1$، آنگاه داریم:

$$\boxed{a^x >> b^x}$$

۳) وقتی $x\to 0^+$ و داشته باشیم $a>1$, $b>c>0$ آنگاه، داریم:

$$\boxed{x^c >> x^b >> a^{-\frac{1}{x}}}$$

مثال: مطلوب است حاصل حد زیر:

$$I=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+5^n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{5^n}=5$$

حل: بدیهی است $\underset{n\to\infty}{2^n < 3^n < 5^n}$ پس داریم:

مثال: مطلوب است حاصل حد زیر:

$$I=\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x^2+e^x}$$

حل: می‌دانیم $\underset{n\to\infty}{x^2<e^x}$ پس داریم:

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x^2+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{x}{2}}}=0$$

می‌دانیم $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ پس می‌توان نوشت:

$$I=\lim_{x\to-\infty}\frac{x.e^{\frac{x}{2}}}{x^2+e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x^2}=0$$

مثال: حاصل حد زیر را به‌دست آورید.

$$I=\lim_{x\to0}\frac{3^{\frac{1}{x}}+4x}{2x+5^{\frac{1}{x}}}$$

حل: بررسی حد راست:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{3^{\frac{1}{x}}+4x}{2x+5^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{3^{\frac{1}{x}}}{5^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=0$$

بررسی حد چپ:

می‌دانیم $\lim\limits_{x\to0^-}3^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^-}5^{\frac{1}{x}}=0$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{3^{\frac{1}{x}}+4x}{2x+5^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{4x}{2x}=2$$

بنابراین حد موجود نمی باشد.

مثال: حاصل حد زیر را بیابید.

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}-3^n-5}{3^{n+1}+3^n-1}$$

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{3^2\times3^n-3^n-5}{3^1\times3^n+3^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{8\times3^n-5}{4\times3^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{8\times3^n}{4\times3^n}=2$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر: $(n>0)$

$$I=\lim_{x\to0^+}x^n e^{\frac{1}{x}}$$

حل:

$$I=\lim_{x\to0^+}x^n e^{\frac{1}{x}}=0\times e^{+\infty}=0\times\infty$$ مبهم

با تغییر متغیر $x=\frac{1}{T}$ داریم:

$$I=\lim_{T\to+\infty}\frac{e^T}{T^n}=\frac{+\infty}{+\infty}$$

اما چون مرتبه بی‌نهایت e^T از T^n بالاتر است، لذا نتیجه می‌شود $I=\infty$

نکته: هرگاه $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$ باشد و تابع $g(x)$ در مجاورت نقطه x_0 کراندار باشد (محدودیت داشته باشد)، می‌توان ثابت کرد:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=0$$

بیان بدیهی: اگر $\lim_{x\to a}f(x)$ برابر صفر واقعی باشد و $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ باشد داریم: $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=0$ (بدون هیچ ابهامی)

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to0}x.\sin\frac{1}{x}$$

حل:

$$\forall x\neq0\Rightarrow-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq1$$

می‌دانیم تابع $\sin\frac{1}{x}$ تابعی کران‌دار است:

$$\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0\times(\text{عبارت کراندار})=0$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{x}\right]$$

حل:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+\Rightarrow\left[\frac{1}{x}\right]=\left[0^+\right]=\text{واقعی } 0$$

$$I=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{x}\right]=+\infty\times\text{واقعی } 0=0$$

مثال: حاصل حد $\lim_{x\to\infty}\frac{x-[x]}{x^2+2x+1}$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{3}$ ب) صفر   ج) 1   د) موجود نیست.

حل: از آنجائی‌که $0\leq x-[x]<1$. بنابراین کران‌دار است:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-[x]}{x^2+2x+1}=\frac{\text{کراندار}}{\infty}=0$$

صور مبهم نمایی و رفع ابهام:

همان‌طور که می دانیم وضعیت‌های $1^{\infty}, 0^0, \infty^0, 0^{\infty}$ به صور مبهم نمایی موسوم هستند و چنانچه در مسئله‌ای به یکی از این وضعیت ها برخورد کنیم، مسئله نیاز به رفع ابهام دارد.

چنانچه در محاسبه حد مقابل:
$$I = \lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$$

به یکی از صور مبهم فوق الذکر برخورد کردیم، قاعده کلی آن است که از دو طرف رابطه فوق $(\ln)$ بگیریم. بدین ترتیب به‌دست می‌آید:
$$\ln I = \lim_{x \to a} g(x).\ln f(x)$$

حال کافی است حد ایجاد شده در سمت راست تساوی فوق را رفع ابهام کنیم، بدین ترتیب $\ln I$ به‌دست می آید و از آن I قابل محاسبه است.

نکته: اگر a, b, c, d اعداد ثابت حقیقی باشند، در این صورت حد زیر که البته مبهم از نوع 1^{∞} می باشد:
$$I = \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{a}{x+b}\right)^{cx+d}$$

پس از رفع ابهام به صورت زیر خواهد بود:
$$I = e^{ac}$$

مثال: حاصل حد زیر کدام است؟
$$\lim_{x \to +\infty} (\cosh x)^{\frac{1}{x}}$$

حل: با توجه به این نکته که می‌دانیم $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ داریم:
$$I = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

از آنجا که $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ لذا خواهیم داشت:
$$I = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{e^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty}\frac{e}{2^{\frac{1}{x}}} = \frac{e}{2^{0^+}} = e$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:
$$I = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{3x-1}$$

حل:
$$\lim_{x \to \infty} I = 1^{\infty} \text{ مبهم}$$
$$I = \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{-4}{2x+3}\right)^{3x-1} = \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{-2}{x + \frac{3}{2}}\right)^{3x-1} = e^{-2\times 3} = e^{-6}$$

مثال: مقدار c را طوری تعیین کنید که حاصل حد زیر برابر 4 شود.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{x}=4$$

حل:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{x}=e^{2c}$$

$$e^{2c}=4\Rightarrow 2c=\ln 4\Rightarrow c=\frac{\ln 4}{2}\Rightarrow c=\ln 2$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 4x)^{\frac{3}{x}}$$

حل:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 4x)^{\frac{3}{x}}=1^{\infty}\ \text{مبهم}$$

از تغییر متغیر $x=\frac{1}{T}$ استفاده می کنیم: (استفاده از قاعده هم ارزی $\lim_{u\to 0} u \sim \lim_{u\to 0}\sin u$)

$$=\lim_{T\to\infty}\left(1+\sin\frac{4}{T}\right)^{3T}=\lim_{T\to\infty}\left(1+\frac{4}{T}\right)^{3T}=e^{4\times 3}=e^{12}$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

حل:

$$I=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=1^{\infty}\ \text{مبهم}$$

با توجه به قاعده هم‌ارزی $\left(\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x-\frac{x^3}{6}\right)$ که از بسط مک‌لوران تابع $\sin x$ به‌دست می‌آید داریم:

$$I=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\frac{x^3}{6}}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{6}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

با تغییر متغیر $x^2=\frac{1}{T}$ داریم:

$$I=\lim_{T\to\infty}\left(1+\frac{-\frac{1}{6}}{T}\right)^{T}=e^{-\frac{1}{6}}$$

توجه: به چند مثال زیر که در آنها، رفع ابهام صورت مبهم نمایی بااستفاده از قاعده کلی انجام شده است توجه کنید:

$$1)\ I=\lim_{x\to 0}(\cos\ x)^{\frac{1}{x^2}}=1^{\infty}$$ مبهم

حل: ابهام را به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل می‌کنیم:

$$\ln\ I=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\ \cos x}{x^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\ln I=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\ .\ \cos x}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x\ .\ \cos x}=\frac{-1}{2}\Rightarrow I=e^{\frac{-1}{2}}$$

$$2)\ I=\lim_{x\to 1}\left(x^2+x-2\right)^{(x-1)}=0^0$$ مبهم

حل:

$$\ln I=\lim_{x\to 1}(x-1)\ln\left(x^2+x-2\right)=0\times\infty$$

صورت مبهم را به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کرده، سپس از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\ln\ I=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\ \left(x^2+x-2\right)}{\frac{1}{x-1}}\xrightarrow{H}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x+1}{x^2+x-2}}{\frac{-1}{(x-1)^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)(x-1)^2}{-\left(x^2+x-2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)(x-1)^2}{-(x-1)(x+2)}$$

$$\ln I=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)\ \ (x-1)}{-(x+2)}=0\Rightarrow\ln I=0\Rightarrow I=e^0=1$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to+\infty}(1+4x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

حل:

$$I=(+\infty)^{\frac{1}{+\infty}}=+\infty^0$$ مبهم

$$\ln I=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}.\ln(1+4x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+4x)}{\ln x}=\frac{+\infty}{+\infty}\xrightarrow{H}$$

$$\ln I=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{1+4x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{1+4x}=1\quad\Rightarrow\quad\ln I=1\to I=e^1$$

مثال: مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$I=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$$

حل:

$$I=1^{\infty}$$ مبهم

$$\Rightarrow\ \ln I=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\times\ln(\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{\cot 2x}\xrightarrow{H}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}}{-2\left(1+\cot^2 2x\right)}=\frac{2}{-2(1+0)}=-1\ \Rightarrow\ I=\frac{1}{e}$$

فصل پنجم

مشتق

تعاریف اولیه

مشتق و برخی مسائل مربوط به آن

تعریف مشتق تابع در یک نقطه: می گویند تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ مشتق‌پذیر است، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) در این نقطه پیوسته باشد.

۲) حد زیر موجود باشد.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

که در صورت موجود بودن حد فوق، به آن مشتق تابع $f(x)$ در نقطه x_0 گفته و با علامت $f'(x_0)$ نشان داده می‌شود.

که معنای هندسی آن این است که، خط مماس بر نمودار تابع $f(x)$ در $x = a$ دارای شیبی معادل $f'(a)$ می‌باشد.

توجه کنید اگر تابعی در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد، حتماً در آن نقطه پیوسته خواهد بود.

مشتق چپ و راست تابع را نیز می‌توان تعریف نمود. به عنوان مثال، تعریف مشتق راست یک تابع در نقطه $x = a$ به‌صورت زیر خواهد بود.

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

و به همین ترتیب می‌توان مشتق چپ تابع را نیز تعریف کرد.

مشتق تابع $f(x)$ در نقطه متعلق به دامنه تعریفش به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

مثال: مطلوب است بررسی پیوستگی و مشتق پذیری تابع $f(x)=(1+x)[x]$ در نقطه $x=-1$.

حل: ابتدا به بررسی پیوستگی در $x=-1$ می‌پردازیم:

الف) بررسی حد راست:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (1+x)[x]$$
$$\lim_{x\to -1^+} -1<x<0 \Rightarrow [x]=-1$$
$$\lim_{x\to -1^+} (x+1)\times -1 = 0$$

ب) بررسی حد چپ:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (1+x)[x]$$
$$\lim_{x\to -1^-} -2<x<-1 \Rightarrow [x]=-2$$
$$\lim_{x\to -1^-} (x+1)\times -2 = 0$$

ج) بررسی مقدار تابع:

$$f(-1)=0\times -1=0$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1)$$

پس اولین شرط را برای مشتق پذیری دارا می‌باشد. یعنی تابع پیوسته می‌باشد.

بررسی مشتق چپ و راست:

الف) مشتق راست:

$$f'_+(-1) = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)\ \ [x]-0}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} [x] = -1$$
$$(-1<x<0 \Rightarrow [x]=-1)$$

ب) مشتق چپ:

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to -1^-} \frac{(x+1)\ \ [x]-0}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} [x] = -2$$
$$(-2<x<-1 \Rightarrow [x]=-2)$$

پس این تابع در نقطه $x=-1$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$$

مثال: تابع زیر مفروض است. راجع به $f'(0)$, $f''(0)$ اظهار نظر کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^2.\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

حل: ابتدا بررسی پیوستگی در نقطه $x=0$ می پردازیم:

ملاحظه می‌شود طبق قضیه ساندویچ حد چپ و راست تابع در نقطه $x=0$ برابر صفر می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} f(x)=0 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=0 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$$

پس تابع در نقطه $x=0$ پیوسته است.

- بررسی $f'(0)$:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2.\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

- بررسی $f''(0)$: از تابع $f(x)$ نسبت به متغیر x مشتق می‌گیریم و ضابطه $f'(x)$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f'(x)=\begin{cases}2x.\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

بررسی پیوستگی تابع $f'(x)$ در $x=0$:

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$$

برای تابع $f'(x)$ چون $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ موجود نیست، بنابراین تابع $f'(x)$ در $x=0$ پیوسته نیست و تابع $f(x)$ در $x=0$ مشتق دوم نـدارد. پس $f''(0)$ موجود نمی‌باشد.

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}2x^3-5x-2 & x\geq 1\\ x^2+2x & x<1\end{cases}$ مفروض است. چنانچه در منحنی این تابع در همسایگی نقطه $x=1$ دو خط مماس رسم کنیم، زاویه بین این دو خط چه مقدار است؟

حل:

$$f'(1^+)=\left(2x^3-5x-2\right)'=\left(6x^2-5\right)\Big|_{x=1}=1=m_1$$

$$f'(1^-)=\left(x^2+2x\right)'=(2x+2)\Big|_{x=1}=4=m_2$$

با استفاده از رابطه $\tan\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$ داریم:

$$\tan\alpha=\left|\frac{4-1}{1+4}\right|\Rightarrow\alpha=\tan^{-1}\frac{3}{5}$$

مثال: در تابع $f(x)=\begin{cases}x^3+x & x\geq 1\\ ax+b & x<1\end{cases}$ ، $f'(1)$ وجود دارد. مطلوب است محاسبه a,b.

حل: پیوستگی تابع در نقطه $x=1$ نتیجه می‌دهد:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)\Rightarrow\lim_{x\to 1^+}\left(x^3+x\right)=\lim_{x\to 1^-}(ax+b)\Rightarrow a+b=2$$

وجود مشتق تابع در $x=1$ نتیجه می‌دهد:

$$f'(x)\Big|_{x=1^+}=f'(x)\Big|_{x=1^-}\Rightarrow\frac{d\left(x^3+x\right)}{dx}\Bigg|_{x=1^+}=\frac{d(ax+b)}{dx}\Bigg|_{x=1^-}\Rightarrow a=4$$

با جایگذاری در معادله قبل به‌دست می‌آید: $b=-2$

مثال: اگر $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}=\sqrt{x}$ باشد. مقدار مشتق $f\left(\frac{1}{x}\right)$ به ازای $x=1$ کدام است؟

حل:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{H}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2f'(x+2h)+f'(x-h)}{1}=3f'(x)=\sqrt{x}\to f'(x)=\frac{\sqrt{x}}{3}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{3}$$

حال به محاسبه مشتق $f\left(\frac{1}{x}\right)$ می‌پردازیم:

$$y=f\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow y'=\frac{-1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$y'(1)=-1\times f'(1)=-\frac{1}{3}$$

مثال: اگر برای $|x|<1$، داشته باشیم: $x\le f(x)\le x+x^2$ مقدار $f'(0)$ را به‌دست آورید.

حل: به ازای $x=0$ داریم:

$$0\le f(0)\le 0+0^2\Rightarrow f(0)=0$$

بنابراین برای هر $|x|<1$ داریم:

$$x\le f(x)\le x+x^2\Rightarrow x\le f(x)-f(0)\le x+x^2$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{x}\le\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\frac{x+x^2}{x} & ,\quad x>0\\ \frac{x+x^2}{x}\le\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\frac{x}{x} & ,\quad x<0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}1\le f'(x)\le 1+x & ,\quad x>0\\ 1+x\le f'(x)\le 1 & ,\quad x<0\end{cases}$$

بنابراین طبق قضیه ساندویچ داریم: $f'(0)=1$

مثال: تابع f در رابطه $f(x+y)=f(x)f(y)+4xy$ صدق می‌کند. چنانچه داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=2$ و اگر حاصل $f'(x)$ به فرم $f'(x)=af(x)+bx$ باشد. مطلوب است مقادیر a , b.

حل: طبق تعریف مشتق و با استفاده از خواص تابع f داریم:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x)f(\Delta x)+4x\Delta x-f(x)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}f(x)\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to0}\frac{4x\,\Delta x}{\Delta x}=2f(x)+4x$$

در نتیجه داریم:

$$b=4\ ,\ a=2$$

مشتق‌گیری از توابعی به فرم $y=u(x)^{V(x)}$

برای مشتق‌گیری از توابعی به فرم $y=u(x)^{v(x)}$ (v , u توابعی از x هستند) می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$y=u^v \Rightarrow \ln y = v\ln u \Rightarrow \frac{y'}{y}=v'\ln u+v\times\frac{u'}{u}$$

و بدین ترتیب y' محاسبه می شود:

$$y'=\left(v'\ln u+v\frac{u'}{u}\right)u^v$$

مثال: مشتق تابع $y=(\tan x)^{\cos x}$ در نقطه $x=\frac{\pi}{4}$ چه مقدار است؟

$$\ln y=\cos x\times\ln(\tan x)\Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y}=\left(-\sin x\ln(\tan x)+\cos x\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\right)\Rightarrow$$

$$y'=\left(-\sin x\ln(\tan x)+\cos x\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\right)(\tan x)^{\cos x}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\ln(1)+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1+1}{1}\right)(1)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$$

محاسبه مشتق مرتبه n ام

اگر v , u توابعی مشتق‌پذیر از x باشند، مشتق مرتبه nام تابع uv از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\boxed{(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^{(n-i)}\ v^{(i)}}$$

که در آن $v^{(i)}$ بیانگر مشتق iام تابع است و $\binom{n}{i}$ که ترکیب i از n است به صورت مقابل تعریف می‌شود: $\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}$

در بسیاری از مسایل بدون نیاز به رابطه بالا با چند بار مشتق‌گیری از توابع، می‌توانیم به یک قاعده کلی برسیم. گاهی برای رسیدن به یک مشتق‌گیری آسان، نیاز داریم ابتدا مساله را ساده‌سازی نماییم.

مثال: تابع $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$ مفروض است. مطلوب است $f^{(n)}(0)$.

حل: ابتدا تابع $f(x)$ را تجزیه می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$$

با چند بار مشتق‌گیری از تابع می‌توان به سادگی به رابطه زیر دست یافت:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}+\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

$$f^{(n)}(0)=-n!+(-1)^n n!=n!\left((-1)^n-1\right)$$

مثال: مطلوب است مشق دوازدهم تابع $y = x\sin x$ به ازای $x=\pi$:

حل: با توجه به رابطه بیان شده می‌توان نوشت:

$$y^{(12)} = \binom{12}{0}(\sin x)^{12}\ x^{(0)} + \binom{12}{1}(\sin x)^{(11)}\ x^{(1)} + \binom{12}{2}(\sin x)^{(10)}\ x^{(2)} + \dots$$

ملاحظه می‌شود از جمله سوم به بعد در سمت راست معادله، صفر می‌باشد. پس داریم:

$$= \frac{12!}{12!}\sin x + \frac{12!}{1!(12-1)!}(-\cos x)(1) = \sin x - 12\cos x$$

$$y^{(12)}_{(\pi)} = 12$$

کاربرد مشتق در تعیین وضعیت صعودی و نزولی تابع و یافتن اکسترمم‌های نسبی یک تابع:

همان‌طوری‌که می دانیم اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، وضعیت صعودی و نزولی بودن تابع در این فاصله را می توان با توجه به علامت مشتق اول تعیین کرد. بدین معنا که هر کجا $f'(x)>0$ باشد، تابع در آن فاصله اکیداً صعودی و هر کجا $f'(x)<0$ باشد، تابع در آن فاصله اکیداً نزولی است و با توجه به این معنا می توان نقاط اکسترمم نسبی یک تابع را مشخص کرد. بدین صورت که می‌گوییم تابع $f(x)$ در نقطه x_0 دارای اکسترمم نسبی است هرگاه:

۱) تابع در این نقطه پیوسته باشد.

۲) علامت $f'(x)$ در مجاورت این نقطه تغییر کند.

کاربرد مشتق در تعیین وضعیت تحدب و تقعر تابع و یافتن نقاط عطف یک تابع:

همان‌طوری‌که می دانیم هرگاه تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، با توجه به علامت مشتق دوم تابع، می‌توان وضعیت تقعر و تحدب آنرا مشخص کرد. بدین معنا که:

۱ـ هر کجا $f''(x)>0$ باشد، تقعر تابع به سمت بالا است.

۲ـ هر کجا $f''(x)<0$ باشد تقعر تابع به سمت پایین است.

و البته با توجه به این معنا می توان نقاط عطف تابع را مشخص کرد. بدین ترتیب که می گوییم تابع $f(x)$ در نقطه x_0 دارای نقطه عطف است هرگاه:

الف) تابع در این نقطه پیوسته باشد.

ب) تابع در این نقطه دارای خط مماس منحصر به فرد باشد.

ج) علامت $f''(x)$ در مجاورت این نقطه تغییر کند (یعنی جهت تقعر و تحدب تابع عوض شود).

مثال: در مورد تابع با ضابطه $f(x) = e^x + x - \cos x$ کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

الف) یک ماکزیمم و دو مینیمم دارد.
ب) نزولی است.

ج) دو مینیمم و یک ماکزیمم دارد.
د) صعودی اکید است.

حل:

$$f'(x) = e^x + 1 + \sin x$$

از آنجا که $-1 \le \sin x \le +1$ می‌باشد. پس $f'(x)$ همواره مثبت است، لذا گزینه (د) صحیح است.

مثال: تابع $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ دارای چند ماکزیمم و مینیمم است؟

حل: بدیهی است دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد و این تابع همواره پیوسته است.

$$y'=x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x-1)x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y'=x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\,\frac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{3x+2(x-1)}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
y'		$+$	∞	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

نقاط بحرانی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\sqrt[3]{x}=0\Rightarrow x=0$$

$$5x-2=0\Rightarrow x=\frac{2}{5}$$

پس تابع دارای یک ماکزیمم در $x=0$ و یک مینیمم در $x=\frac{2}{5}$ می‌باشد.

مثال: تابع $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$ چند اکسترمم نسبی و نقطه عطف دارد؟

حل: دامنه تابع مجموعه اعداد حقیقی مثبت می‌باشد.

$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x+1}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{x^2-2x^2-2x}{x^4}=-\frac{x+2}{x^3}$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f''(x)$	-	
f		

لذا تابع مذکور در دامنه خود اکیداً صعودی بوده و اکسترمم نسبی ندارد و تقعر آن همواره به سمت پایین بوده و نقطه عطف نیز ندارد.

مثال: تابع $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ مفروض است، مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق این تابع را به‌دست آورید.

حل: با توجه به وضعیت خاص تعریف تابع $f(x,y)$ می‌توان با فرض $x^2+y^2=t$ رفتار این تابع را از طریق رفتار تابع یک متغیره زیر ارزیابی کرد:

$$f(t)=te^{-t}\quad,\quad t\geq 0$$

$$f'(t)=e^{-t}-te^{-t}=(1-t)e^{-t}$$

$$f'(t)=0\Rightarrow t=1$$

$$f(1)=1e^{-1}=\frac{1}{e}$$

t	0	1	$+\infty$
f'	+		−
f	↗		↘

ماکزیمم مطلق تابع $\frac{1}{e}$ می‌باشد.

$$f(0)=0e^{-0}=0$$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{t\to+\infty} t\,e^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0$$

مینیمم مطلق تابع 0 می‌باشد.

تذکر: هرگاه در معادله $f(x)=0$، معادله دارای ریشه مکرر رتبه زوج باشد، این ریشه طول نقطه ماکزیمم یا مینیمم نسبی خواهد بود **به‌طوری‌که، اگر عرض نقاط مجاور این** ریشه مثبت باشد، نقطه مینیمم، و اگر منفی باشد، نقطه ماکزیمم است و اگر معادله $f(x)=0$ دارای **ریشه** مکرر مرتبه فرد باشد، **این** ریشه طول نقطه عطف منحنی است.

مثال: در **تابع** $y=\frac{(x+a)^3}{x^2}$ **نقطه** $x=1$ متناظر با نقطه عطف است. مقدار a کدام است؟

حل: راه حل اول:

$$y'=\frac{3(x+a)^2x^2-2x(x+a)^3}{x^4}=\frac{x^3-3a^2x-2a^3}{x^3}$$

$$y''=\frac{\left(3x^2-3a^2\right)x^3-3x^2\left(x^3-3a^2x-2a^3\right)}{x^6}=\frac{6a^2(x+a)}{x^4}$$

از آنجا که **در** نقطه عطف $x=1$، **مشتق** دوم باید تغییر علامت دهد پس $x=1$ ریشه عبارت $x+a$ باشد یعنی خواهیم داشت: $a=-1$

راه حل **دوم:** طبق **نکته گفته شده داریم** $x=-a$ چون ریشه مکرر مرتبه فرد است، پس این نقطه‌ی عطف است. پس: $a=-1$.

مثال: نقاط **اکسترمم** و عطف تابع $f(x)=e^{-x^2}$ را، در صورت وجود، بیابید.

حل:

$$y=e^{-x^2}$$

$$y'=-2xe^{-x^2}$$

$$y''=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right)$$

با توجه به این نکته که می‌دانیم دامنه تابع مقادیر حقیقی است، می‌توان نوشت:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
y'		+	+	0	−	−
y''	+		0	−	0	+

لذا تابع **در نقطه** $x=0$ **دارای ماکزیمم** نسبی و در $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ دارای عطف است.

مثال: اگر نقطه عطف منحنی $y=x^3+mx^2$ بر روی خط $y=2x$ واقع شده باشد. مقدار m را به‌دست آورید.

حل:

$$y'=3x^2+2mx$$
$$y''=6x+2m$$

در نقطه عطف لازم است داشته باشیم $y''=0$ بنابراین داریم:

$$6x+2m=0 \Rightarrow x=\frac{-m}{3} \quad (I)$$

و طبق فرض مساله $x=\frac{-m}{3}$ را در معادله $y=2x$ قرار می‌دهیم:

$$y=\frac{-2m}{3} \qquad (II)$$

مقادیر (I) , (II) به‌دست آمده را در معادله تابع قرار می‌دهیم:

$$\frac{-2m}{3}=\frac{-m^3}{27}+\frac{m^3}{9} \Rightarrow -18m=2m^3 \Rightarrow 2m\left(m^2+9\right)=0 \Rightarrow m=0$$

قضیه آزمون مشتق دوم:

اگر $f'(a)=0$ باشد، می‌توان گفت:

الف) اگر $f''(a)>0$ باشد، آنگاه تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای min نسبی است.

ب) اگر $f''(a)<0$ باشد، آنگاه تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای max نسبی است.

ج) اگر $f''(a)=0$ باشد، آنگاه تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ ممکن است دارای max یا min نسبی و یا نقطه عطف باشد (آزمون بی‌نتیجه است).

مثال: معادله دیفرانسیل همراه با شرایط کمکی روبرو را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} y^2y''+x^2\cos y'+(x+1)y=0 \\ y(1)=3\ ,\ y'(1)=0 \end{cases}$$

نقطه $x=1$ برای جواب این معادله دیفرانسیل:

الف) یک max نسبی است. ب) یک min نسبی است. ج) یک عطف است. د) یک نقطه معمولی است.

حل: با توجه به این نکته که $y'(1)=0$ است، متوجه می‌شویم که نقطه $x=1$ برای این تابع یک نقطه معمولی نیست و با بررسی این معادله دیفرانسیل در نقطه $x=1$ خواهیم داشت:

$$y^2(1).y''(1)+1.\cos y'(1)+(1+1).y(1)=0 \Rightarrow 9.y''(1)+1+6=0 \Rightarrow y''(1)=\frac{-7}{9}$$

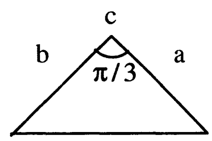
پس $y(x)$ در نقطه $x=1$ دارای max نسبی است و گزینه (الف) صحیح است.

نسبت‌های وابسته:

ممکن است یک کمیت به چندین متغیر وابسته باشد و لذا با تغییر کردن آن متغیرها، کمیت موردنظر نیز تغییر می کند. برای اینکه مشخص شود نحوه تغییرات کمیت موردنظر چگونه است، کافی است ارتباط این کمیت را با متغیرهای مذکور نوشته و با استفاده از مفهوم مشتق (که بیانگر تغییرات لحظه ای است) معلوم کنیم که تغییرات متغیرهای مربوط، کمیت مذکور را چگونه تغییر می دهد.

مثال: دو ضلع مثلثی به ترتیب $b=4m$, $a=5m$ بوده و زاویه بین این دو ضلع $\hat{c}=\frac{\pi}{3}$ می باشد. چنانچه ضلع a دارای طول ثابتی بوده و ضلع b با سرعت $1\frac{m}{s}$ در حال بزرگ شدن و زاویه c با سرعت $1\frac{rad}{s}$ در حال کم شدن باشد، سرعت تغییرات مساحت این مثلث را بەدست آورید.

حل:

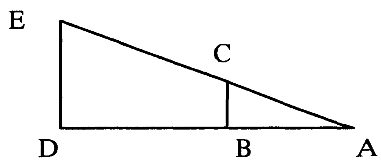


$$\left.\begin{array}{ll} a=5m & \frac{da}{dt}=0 \\ b=4m & \frac{db}{dt}=1\frac{m}{s} \\ \hat{c}=\frac{\pi}{3} & \frac{dc}{dt}=-1\frac{rad}{s} \end{array}\right\} \frac{ds}{dt}=?$$

$$s=\frac{1}{2}a.b.\sin c=\frac{5}{2}b.\sin c$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{5}{2}\left(\frac{db}{dt}.\sin c+\frac{dc}{dt}.b.\cos c\right)=\frac{5}{2}\left(1\times\sin\frac{\pi}{3}+(-1).(4).\cos\frac{\pi}{3}\right)=5\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-1\right)=-2.83\frac{m^2}{s}$$

مثال: اندازه قد مردی $180cm$ می باشد، این مرد با سرعت $3\frac{m}{s}$ در حال دور شدن از تیر چراغ برق با ارتفاع $540cm$ است. سرعت حرکت سایه این مرد را بەدست آورید:



$$\left.\begin{array}{l} BC=180cm \\ DE=540cm \\ \frac{d(BD)}{dt}=3\frac{m}{s} \\ \frac{d(AD)}{dt}=?\frac{m}{s} \end{array}\right\} \text{فرضیات:}$$

با توجه به دو مثلث ABC , ADE می توان نوشت:

$$\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD} \rightarrow \frac{180}{540}=\frac{AD-BD}{AD} \rightarrow 3(AD-BD)=AD \rightarrow$$

$$AD=\frac{3}{2}BD \rightarrow \frac{d(AD)}{dt}=\frac{3}{2}\frac{d}{dt}(BD)=\frac{3}{2}(3)=\frac{9}{2}\frac{m}{s}$$

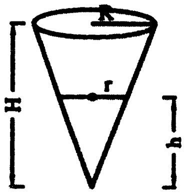
مثال: آب با $\frac{\pi}{4}$ واحد مکعب در هر ثانیه وارد مخزن مخروطی وارونه شکلی به بلندی 12 واحد و شعاع قاعده 4 واحد می‌شود، سرعت افزایش ارتفاع آب در مخزن وقتی ارتفاع آب 6 واحد باشد را محاسبه کنید؟

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{4} \\ H=12 \\ R=4 \\ h=6 \end{array}\right. \qquad \frac{dh}{dt}=?$$

حل: اگر ارتفاع آب داخل مخزن h فرض شود، طبق شکل می‌توان نوشت:

$$\frac{h}{H}=\frac{r}{R}\Rightarrow\frac{h}{12}=\frac{r}{4}\Rightarrow h=3r$$

لذا حجم آب عبارت است از:



$$v=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{3}\right)^2 h \quad\Rightarrow\quad V=\frac{\pi h^3}{27}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{9}h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{9}(6)^2\times\frac{dh}{dt} \quad\Rightarrow\quad \frac{dh}{dt}=\frac{1}{16}$$

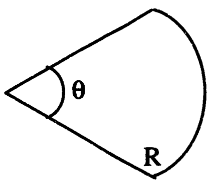
اکسترمم کردن کمیتهای دلخواه با استفاده از مشتق:

برخی مواقع یک کمیت موردنظر که می خواهیم آن را اکسترمم کنیم، تابعی از دو متغیر می باشد. به گونه ای که بین این دو متغیر ارتباط خاصی نیز موجود است، در چنین مواقعی کافی است، رابطه کمیت مذکور را با متغیرهای گفته شده نوشته و سپس با توجه به رابطه خاصی که بین این دو متغیر وجود دارد، کمیت مذکور را تنها برحسب یک متغیر بازنویسی کنیم و در نهایت با استفاده از مشتق به اکسترمم کردن آن بپردازیم.

مثال: قطاعی از یک دایره با شعاع R و زاویه مرکزی θ (برحسب رادیان) مفروض است. چنانچه محیط این قطاع ثابت باشد، مساحت این قطاع به ازای چه θای اکسترمم می شود؟ و این اکسترمم از چه نوعی است؟

حل:

محیط قطاع $=2R+R\theta=k\longrightarrow R=\dfrac{k}{2+\theta}$



مساحت	زاویه مرکزی
$s=\pi R^2$	2π
$s=\dfrac{\pi R^2\theta}{2\pi}=\dfrac{R^2\theta}{2}$	θ

با توجه به اینکه در قسمت اول $R=\dfrac{k}{2+\theta}$ به‌دست آمد، داریم:

بجای R مقدار $R=\dfrac{k}{2+\theta}$ را قرار می‌دهیم:

$$s=\frac{R^2\theta}{2}=\left(\frac{k}{2+\theta}\right)^2\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{ds}{d\theta}=0\Rightarrow\frac{k^2}{2}\,\frac{(2+\theta)^2-2(2+\theta)\theta}{(2+\theta)^4}=0\Rightarrow 2+\theta-2\theta=0\Rightarrow\theta=2\,\text{rad}$$

لذا در $\theta=2\,\text{rad}$ مساحت قطاع مذکور اکسترمم شده و این اکسترمم از جنس ماکزیمم است.

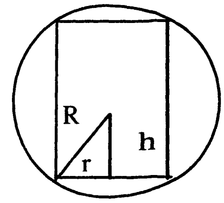
مثال: می‌خواهیم در داخل کره ای با شعاع واحد، استوانه ای با حجم ماکزیمم را محاط کنیم، ارتفاع این استوانه چقدر است؟

حل: داریم:

R: شعاع کره

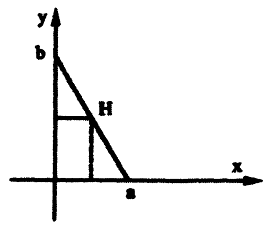
r: شعاع قاعده استوانه

h: نصف ارتفاع استوانه



$$v = 2\pi\ r^2\ .\ h$$
$$r^2 + h^2 = R^2 = 1$$
$$v = 2\ \pi\ \left(1 - h^2\right)\ .\ h$$
$$\frac{dv}{dh} = 0 \Rightarrow 2\pi\ \left(1 - 3h^2\right) = 0 \Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{ارتفاع استوانه} = 2h = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

مثال: مثلث قائم‌الزاویه‌ای با رئوس $(0,0)$ $(a,0)$ $(0,b)$ مفروض است. $(a,b>0)$ یک مستطیل در داخل این مثلث به گونه‌ای محاط شده که یک راس آن روی مبدا، دو ضلع آن منطبق بر محورهای مختصات و راس چهارم آن بر روی وتر مثلث می‌باشد. مساحت بزرگترین مستطیل ممکن چقدر است؟



حل: معادله وتر مثلث به صورت زیر خواهد بود:

$$y = \frac{-b}{a}x + b$$

مختصات نقطه H به صورت زیر خواهد بود:

$$H\left(x, \frac{-b}{a}x + b\right)$$

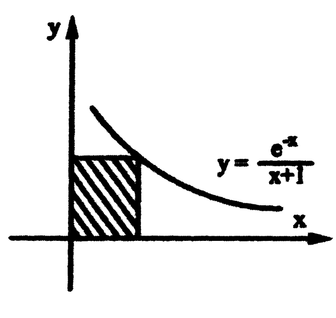
مساحت مستطیل رسم شده عبارت است از:

$$s = x_H . y_H = x\left(\frac{-b}{a}x + b\right)$$
$$\frac{ds}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{-2b}{a}x + b = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

با جایگذاری در معادله مساحت داریم:

$$s_{max} = \frac{a}{2}\left(\frac{-b}{a} \times \frac{a}{2} + b\right) = \frac{ab}{4}$$

مثال: در شکل مقابل مساحت مستطیل وقتی ماکزیمم می‌شود که x برابر چه مقداری باشد؟



حل: مساحت مستطیل برابراست با:

$$s = x.y$$
$$s = x \times \frac{e^{-x}}{x+1} \Rightarrow s'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}e^{-x} - \frac{x}{1+x}e^{-x}$$
$$s'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^{-x}}{(1+x)^2}\left(1 - x(1+x)\right) = 0 \Rightarrow$$
$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

بدیهی است $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ قابل قبول نبوده، لذا پاسخ $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ می‌باشد.

پیدا کردن کوتاهترین و بلندترین فاصله نقاط یک منحنی تا مبدا مختصات

اگر چه راه‌های متفاوتی وجود دارد، اما چنانچه منحنی موردنظر را در مختصات قطبی و برحسب متغیرهای r,θ بازنویسی کنیم، در حقیقت بیشترین و کمترین مقادیر ممکن برای r که به ازای θ های ممکن اتفاق می‌افتد، می‌تواند پاسخ به سؤالات موردنظر باشد. از آنجا که در این گونه مسایل r مبین فاصله هر نقطه از منحنی تا مبدا مختصات می‌باشد، لذا هدف، یافتن حداقل مقدار r به ازای θ می‌باشد.

مثال: بیشترین و کمترین فاصله منحنی $x^2+xy+y^2=16$ تا مبدا مختصات کدام است؟

حل: با استفاده از دستگاه قطبی می‌توان نشان داد:

$$(r\cos\theta)^2+\left(r^2\cos\theta\sin\theta\right)+(r\sin\theta)^2=16$$

$$r^2+r^2\cos\theta\sin\theta=16\to r^2=\frac{16}{1+\sin\theta.\cos\theta}=\frac{32}{2+\sin2\theta}$$

برای اینکه r^2 ماکزیمم مقدار خود را داشته باشد، باید مخرج کمترین مقدار را داشته باشد.

پس لذا باید: $\sin2\theta=-1$

$$\sin2\theta=-1\to r_{max}^2=\frac{32}{+2-1}=32\to r_{max}=\sqrt{32}$$

و برای اینکه r^2 مینیمم مقدار خود را داشته باشد باید مخرج ماکزیمم مقدار را داشته باشد.

پس باید: $\sin2\theta=1$

$$\sin2\theta=1\to r_{min}^2=\frac{32}{2+1}=\frac{32}{3}\to r_{min}=\sqrt{\frac{32}{3}}$$

مثال: کمترین و بیشترین فاصله مبدا مختصات از منحنی $x^2+y^2-2x-8=0$ است؟

حل: با استفاده از دستگاه قطبی می‌توان نشان داد:

$$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2-2r\cos\theta-8=0\ \Rightarrow\ r^2-2r\cos\theta-8=0\ \Rightarrow\ r=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta+8}$$

با حل معادله درجه دوم به ازای مجهول r داریم:

از آنجا که $\cos\theta<\sqrt{\cos^2\theta+8}$ است و اساساً r نمی‌تواند منفی باشد داریم:

$$r=\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+8}$$

$$\frac{dr}{d\theta}=-\sin\theta+\frac{-2\cos\theta\sin\theta}{2\sqrt{\cos^2\theta+8}}=\frac{-\sin\theta\left(\sqrt{\cos^2\theta+8}+\cos\theta\right)}{\sqrt{\cos^2\theta+8}}$$

$$\frac{dr}{d\theta}=0\Rightarrow\begin{cases}\sin\theta=0\\ \sqrt{\cos^2\theta+8}+\cos\theta=0\end{cases}$$

بنابراین اکسترمم‌های r به ازای $\sin\theta=0$ اتفاق می‌افتد.

$$\theta=0\Rightarrow r=1+\sqrt{1+8}=4$$

$$\theta=\pi\Rightarrow-1+\sqrt{1+8}=2$$

لذا حداقل و حداکثر فاصله مبدا از منحنی موردبحث به ترتیب $r_{min}=2$ و $r_{max}=4$ می‌باشد.

تقریب زدن توابع در نقاط خاص با استفاده از تعریف مشتق:

چنانچه Δx بسیار کوچک باشد، با استفاده از تقریب مشتق می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0).\Delta x \\ \Delta x \to 0 \quad \text{با شرط} \end{cases}$$

از این رابطه، زمانی استفاده می‌شود که مقدار این تابع و مقدار مشتق آن را در نقطه ای بدانیم و مقدار تابع مذکور را در نزدیکی های این نقطه بخواهیم.

مثال: تقریب مناسبی برای $\tan 29°$ به‌دست آورید.

حل:

$$f(x)=\tan x \to f'(x)=1+\tan^2 x$$

$$x_0=30° \qquad \Delta x=-1°=-\frac{\pi}{180}\text{rad}$$

$$\tan 29°=\tan(30°-1°)\sim \tan 30°+(1+\tan^2 30°).\frac{-\pi}{180}=0.554$$

مثال: اگر Δx کوچک باشد، کدام عبارت زیر تقریب بهتری برای $\frac{1-\Delta x}{1+\Delta x}$ است؟

الف) 1 ب) $1-\Delta x$ ج) $1-2\Delta x$ د) $1+\Delta x$

حل:

$$I=\frac{1-\Delta x}{1+\Delta x}=\frac{1-\Delta x}{1+\Delta x}.\frac{1-\Delta x}{1-\Delta x}=\frac{1+(\Delta x)^2-2\Delta x}{1-(\Delta x)^2}$$

چون Δx کوچک است، لذا $(\Delta x)^2$ بسیار کوچک است و قابل صرف‌نظر است. بنابراین داریم: $I\sim 1-2\Delta x$

مثال: مقدار تقریبی $\text{Arc}\tan\sqrt{1.01}$ را بیابید:

حل:

$$f(x)=\text{Arc}\tan\sqrt{x} \to f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x}$$

$$x_0=1 \quad , \quad \Delta x=\frac{1}{100}$$

$$\text{Arc}\tan\sqrt{1+\frac{1}{100}}=\text{Arc}\tan\sqrt{1}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{1}}}{1+1}\times\frac{1}{100}$$

$$\text{Arc}\tan\sqrt{1.01}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{400}$$

چند قضیه:

الف) قضیه بولتزانو (قضیه مقدار میانی):

هرگاه تابع $y=f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد و داشته باشیم: $f(a).f(b)<0$ آنگاه می توان نتیجه گرفت: $\exists c\in(a,b) \mid f(c)=0$

از این قضیه در برخی مواقع برای مشخص کردن این‌که یک معادله در یک فاصله دارای ریشه است یا خیر استفاده می شود.

ب) قضیه رول:

تابع $y=f(x)$ را در نظر بگیرید. چنانچه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱ـ تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد.

۲ـ تابع $f(x)$ در فاصله (a,b) مشتق‌پذیر باشد.

۳ـ $f(a)=f(b)$

آنگاه می توان نشان داد: $\exists c\in(a,b) \mid f'(c)=0$

توجه: از این قضیه نتیجه‌ای به‌دست آمده، که با استفاده از آن می توان در برخی مواقع راجع به تعداد ریشه های یک معادله در یک فاصله اظهارنظر کرد، نتیجه مذکور چنین است:

فرض کنید تابع $y=f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته و در فاصله (a,b) مشتق‌پذیر باشد، در این‌صورت می‌توان نشان داد، اگر معادله $f'(x)=0$ در فاصله $[a,b]$ دارای m ریشه باشد، معادله $f(x)=0$ در فاصله مذکور حداکثر $m+1$ ریشه دارد.

مثال: معادله $x^5+x^3-1=0$ در کدام فاصله زیر دارای یک ریشه حقیقی است؟

الف) $[-2,-1]$ ب) $[-1,1]$ ج) $[1,3]$ د) $[3,5]$

حل: تابع $f(x)=x^5+x^3-1$ همواره پیوسته است. با جایگذاری گزینه‌ها در معادله داریم:

$f(-1)=-3\ ,\ \ f(1)=1 \Rightarrow f(-1)\,.\,f(1)<0$

پس طبق قضیه بولتزانو، $f(x)$ در فاصله $[-1,1]$ حتماً دارای صفر حقیقی خواهد بود.

مثال: فرض کنید داشته باشیم $g(x)=e^{-kx}.f(x)$ که در آن k یک عدد ثابت می باشد. چنانچه تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد و بدانیم $f(a)=f(b)=0$ و $\exists c\in(a,b)$ آنگاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف) $f(c)=0$ ب) $g''(c)=0$ ج) $f'(c)=-kf(c)$ د) $f'(c)=+kf(c)$

حل: با توجه به فرضیات مسئله بدیهی است برای تابع $f(x)$ شرایط قضیه رول در فاصله داده شده برقرار است. بنابراین داریم:

$\exists n\in(a,b) \mid f'(n)=0$

از طرفی تابع e^{-kx} هموار پیوسته و مشتق‌پذیر است. لذا تابع $g(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و $g(a)=g(b)=0$.

لذا طبق قضیه رول برای تابع $g(x)$ داریم: $\exists n\in(a,b) \mid g'(n)=0$

$\rightarrow g'(x)=-ke^{-kx}.f(x)+e^{-kx}.f'(x)$

$g'(n)=0 \rightarrow -ke^{-kn}.f(n)+e^{-kn}.f'(n)=0 \rightarrow f'(n)=kf(n)$

پس گزینه (د) صحیح است.

مثال: در رابطه با تعداد ریشه‌های معادله $xe^x-1=0$ در بازهٔ $[0,1]$ کدام عبارت صحیح است؟

الف) دارای ریشه حقیقی نمی باشد. ب) حداکثر یک ریشه حقیقی دارد.

ج) دو ریشه حقیقی دارد. د) فقط یک ریشه حقیقی دارد.

حل: از هر دو قضیه رول و مقدار میانی استفاده می کنیم:

ملاحظه می شود تابع $f(x)=xe^x-1$ در فاصله $[0,1]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. لذا داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-1<0 \\ f(1)=e-1>0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طبق قضیه مقدار میانی}} \exists c\in(0,1) \mid f(c)=0$$

اما داریم: $f'(x)=e^x+xe^x$

ملاحظه می شود تابع $f'(x)$ در فاصله مذکور دارای ریشه نمی باشد و لذا طبق قضیه رول معادله $f(x)=0$ در این فاصله تنها یک ریشه دارد و گزینه (د) صحیح است.

مثال: در مورد معادله $x^2-x\sin x-\cos x=0$ می‌توان گفت؟

الف) فقط یک جواب دارد. ب) فقط دو جواب دارد. ج) بیش از دو جواب دارد. د) اصلاً جواب ندارد.

حل: با تعریف تابع $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$ ملاحظه می‌شود که تابع مذکور زوج است.

$$f(-x)=(-x)^2-(-x)\sin(-x)-\cos(-x)=x^2-x\sin x-\cos x=f(x)$$

و نیز ملاحظه می‌شود $f(0)=-1\neq 0$ و لذا معادله در $x=0$ جوابی ندارد.

پس بحث خود را در $x\in(0,+\infty)$ ادامه می‌دهیم:

$$f'(x)=2x-x\cos x-\sin x+\sin x=x(2-\cos x)>0$$

$$f(2\pi)=4\pi^2-1>0 \quad , \quad f(0)=-1<0$$

پس طبق قضیه بولتزانو، معادله مزبور در فاصله $(0,+\infty)$ فقط و فقط یک ریشه دارد. لذا به‌واسطه زوج بودن تابع $f(x)$ در کل مجموعه اعداد حقیقی دارای تنها دو جواب است.

مثال: معادله $x^6+x^4+x^2-1=0$ دارای چند ریشه حقیقی است؟

الف) 6 ریشه ب) 4 ریشه ج) 2 ریشه د) ریشه حقیقی ندارد.

حل: تابع $f(x)=x^6+x^4+x^2-1$ همواره پیوسته و مشتق‌پذیر است. داریم:

$$f'(x)=6x^5+4x^3+2x=2x\left(3x^4+2x^2+1\right)$$

بدیهی است $f'(0)=0$ پس تابع مذکور حداکثر دارای دو ریشه است. ملاحظه می‌شود:

$$f(10)>0 \qquad f(0)<0 \qquad f(-10)>0$$

نمودار فقط دوبار محور xها را قطع کرده است، تابع فقط دو ریشه دارد.

مثال: معادله $\cos^2 x+3x+2=0$ مفروض است، راجع به تعداد ریشه های حقیقی این معادله چه می توان گفت؟

الف) فاقد ریشه حقیقی ب) حداکثر یک ریشه حقیقی

ج) دو ریشه حقیقی د) فقط یک ریشه حقیقی

حل: با تعریف $f(x)=\cos^2 x+3x+2$ داریم: $f'(x)=-\sin 2x+3>0$

بنابراین، معادله $f'(x)=0$ در R جواب ندارد. لذا معادله $f(x)=0$ در R حداکثر یک جواب دارد. با کمی دقت متوجه می شویم شرایط قضیه مقدار میانی برقرار است و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)>0 \\ f(-10)<0 \end{array}\right\} \rightarrow \exists c\in(-10,0) \mid f(c)=0$$

لذا معادله موردنظر یک و فقط یک ریشه حقیقی دارد و گزینه (د) صحیح است.

ج) قضیه لاگرانژ (قضیه مقدار میانگین در مشتق):

تابع $y=f(x)$ را در نظر بگیرید چنانچه:

الف) تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در فاصله (a,b) مشتق‌پذیر باشد.

آنگاه می توان نشان داد:

$$\boxed{\exists c\in(a,b)\ \mid\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)}$$

از این قضیه نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

هرگاه تابع $y=f(x)$ در فاصله $[a,b]$ دارای شرایط قضیه لاگرانژ باشد، می توان گفت:

$$\boxed{\min f'(x)\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le\max f'(x)}$$

که در نامساوی فوق مقادیر ماکزیمم و مینیمم $f'(x)$ با توجه به x های متعلق به فاصله $[a,b]$ انتخاب می شود.

مثال: اگر $f(1)=10$ به ازای $1\le x\le 4$ داشته باشیم؛ $f'(x)\ge 2$، در این صورت کمترین مقدار $f(4)$ چقدر است؟

الف) 13 ب) 14 ج) 15 د) 16

حل: طبق نتیجه قضیه لاگرانژ داریم:

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}\ge 2\Rightarrow\frac{f(4)-10}{3}\ge 2\Rightarrow f(4)\ge 16$$

گزینه (د) صحیح است.

مثال: فرض کنید $f(x)$ همواره مشتق‌پذیر باشد و $f(2)=-3$، اگر به ازای $2<x<5$ داشته باشیم $1<f'(x)<2$ آنگاه، مطلوب است حدود $f(5)$.

حل: شرایط قضیه لاگرانژ در بازه $[2,5]$ برقرار است.

$$\min f'(x)<\frac{f(5)-f(2)}{5-2}<\max f'(x)$$

$$1<\frac{f(5)+3}{3}<2\Rightarrow 3<f(5)+3<6\Rightarrow 0<f(5)<3$$

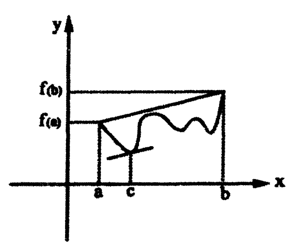
مثال: برای تابع $f(x)=x^2-3x+1$ که در فاصله $[1,3]$ تعریف شده است، c متناظر با قضیه لاگرانژ را پیدا کنید، این c از نظر هندسی چه مفهومی دارد؟

حل: همان‌طور که ملاحظه می‌شود تابع مذکور در فاصله $[1,3]$ شرایط قضیه لاگرانژ را دارد.

$f(3)=1$

$f(1)=-1$

مطابق قضیه لاگرانژ باید داشته باشیم:



$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{1-(-1)}{3-1}=\frac{2}{2}=1$$
$$f'(x)=2x-3=1\Rightarrow x=2\ ,\ c=x=2$$

از نظر هندسی: مماس در c بر روی نمودار تابع f(x) موازی خطی است که از دو نقطه $(a,f(a))$, $(b,f(b))$ می گذرد.

مثال: تابع $f(x)$ در فاصله $[-2,1]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f'(x)=\frac{1}{x^4+x^2+1}$$

چنانچه بدانیم $f(1)=2$ می باشد، راجع به حدود $f(-2)$ چه اظهارنظر می کنیم:

حل: بدیهی است که تابع مذکور شرایط قضیه لاگرانژ را دارد و نیز داریم:

$$\min f'(x)=f'(-2)=\frac{1}{21}\ ,\ \max f'(x)=f'(0)=1$$

لذا طبق قضیه لاگرانژ داریم:

$$\frac{1}{21}\leq\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}\leq 1\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{21}\leq\frac{2-f(-2)}{3}\leq 1$$
$$-1<f(-2)\leq 2-\frac{3}{21}\quad\Rightarrow\quad -1\leq f(-2)\leq\frac{13}{7}$$

مثال: در تابع با ضابطه $f(x)=\tan^{-1}x\ ,\ 0\leq x\leq 1$، مقدار $\frac{\tan^{-1}x}{x}$ در کدام فاصله واقع است؟

حل: تابع $f(x)=\tan^{-1}x$ در فاصله $[0,x]$ که در آن $0\leq x\leq 1$ است، شرایط قضیه لاگرانژ را داراست.

$$\min f'(x)\big|_{(0,x)}<\frac{f(x)-f(0)}{x-0}<\max f'(x)\big|_{(0,x)}$$

اما داریم $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ و بدیهی است در فاصله مورد بحث، حداقل و حداکثر f' به ترتیب در نقاط $x=1$, $x=0$ رخ می‌دهد و $\frac{1}{2}$, 1 خواهند بود.

$$\frac{1}{2}<\frac{\tan^{-1}x}{x}<1$$

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}\cos x & -1\leq x\leq 0\\ x^2+x+1 & 0<x\leq 1\end{cases}$ مفروض است. آیا تابع مذکور حائز شرایط قضیه لاگرانژ در فاصله $[-1,+1]$ می باشد؟

حل: بدیهی است، هدف بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع در فاصله داده شده است و کافی است این موضوع را در جایی که ضابطه تابع تغییر کرده یعنی $x=0$ بررسی کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=1\qquad\lim_{x\to 0^-}f(x)=1\qquad f(0)=1$$

پیوستگی برقراراست.

حال مشتق پذیری را در نقطه $x=0$ بررسی می کنیم:

$$f'_+(0)=\left(x^2+x+1\right)'\big|_{x=0}=(2x+1)\big|_{x=0}=1$$
$$f'_-(0)=(\cos x)'\big|_{x=0}=(-\sin x)\big|_{x=0}=0$$

این تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

بنابراین تابع $f(x)$ در فاصله داده شده دارای شرایط قضیه لاگرانژ نمی باشد.

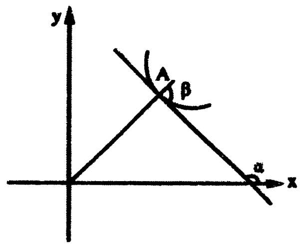
زاویه بین خط مماس بریک منحنی قطبی در یک نقطه و شعاع حامل آن نقطه:

فرض کنید بر منحنی $r = f(\theta)$ در نقطه A خط مماسی رسم کرده باشیم، زاویه بین این خط مماس و شعاع حامل نقطه A از رابطه زیـر به‌دست می‌آید:

$$\tan\beta = \left.\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}\right|_{\theta}$$

و همچنین زاویه خط مماس با جهت مثبت محور xها از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\tan\alpha = \left.\frac{r+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)\tan\theta}{-r\tan\theta+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)}\right|_{\theta}$$



مثال: بر منحنی قطبی $r=\frac{1}{\theta+\cos\theta}$ در نقطه ای متناظر با $\theta=0$ خط مماس رسم کرده‌ایم. زاویه بین خط مماس مذکور و شعاع حامل نقطه مربوط را پیدا کنـید.

حل:

$$\tan\alpha = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{\frac{1}{\theta+\cos\theta}}{\frac{-(1-\sin\theta)}{(\theta+\cos\theta)^2}} = \frac{\theta+\cos\theta}{-1+\sin\theta} = \frac{0+\cos 0}{-1+\sin 0} = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

قاعده مشتق‌گیری ضمنی

قاعده مشتق‌گیری ضمنی: چنانچه داشته باشیم: $F(x,y)=0$ برای به‌دست آوردن مشتق y نسبت به x می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد.

$$\boxed{y' = \frac{-F'_x}{F'_y}}$$

توجه: باید دقت کرد که اگر نخواهیم از رابطه مذکور استفاده کنیم یا اصولاً هدف محاسبه مشـتقات بـالاتر y باشـد، مـی‌تـوان از رابطـه $F(x,y)=0$ مشتق‌گیری معمولی کرد تا تکلیف y' مشخص شود. البته توجه داریم در حین انجام این کار، y تـابع و x متغیـر مسـتقل خواهد بود.

مثال: اگر $x^y = y^x$ باشد. آنگاه مطلوب است $\frac{dy}{dx}$:

حل: از طرفین لگاریتم در مبنای نپر می‌گیریم:

$$y\ln x = x\ln y$$

$$y'\ln x + y\frac{1}{x} = \ln y + x\frac{y'}{y}$$

$$y'\left(\ln x-\frac{x}{y}\right)=\ln y-\frac{y}{x}\Rightarrow y'=\frac{\ln y-\frac{y}{x}}{\ln x-\frac{x}{y}}=\frac{y}{x}\times\frac{x\ln y-y}{y\ln x-x}$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $x^3+\ln x+x^2y+\cos y-2=0$ مطلوب است محاسبه y' در نقطه $(1,0)$:

حل: طبق رابطه بالا داریم:

$$y'=-\left.\frac{3x^2+\frac{1}{x}+2xy}{x^2-\sin y}\right|_{(1,0)}=-4$$

راه حل دوم: استفاده از مشق‌گیری معمولی با در نظر گرفتن y به عنوان تابعی از x، داریم:

$$\left.3x^2+\frac{1}{x}+2xy+x^2y'-y'\sin y=0\right|_{(1,0)}\Rightarrow y'=-4$$

مثال: معادله‌ی منحنی‌ای پیدا کنید که از نقطه $(2,1)$ بگذرد و عمود بر منحنی در هر نقطه (x,y) دارای شیب $\frac{2xy}{y^2-x^2}$ باشد.

حل: می‌دانیم خط قائم عمود بر خط مماس است.

$$m=\frac{x^2-y^2}{2xy} \quad \text{مماس}$$

اگر معادله $F(x,y)=0$ فرض شود. طبق قاعده مشتق‌گیری ضمنی باید داشته باشیم:

$$y'=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{x^2-y^2}{2xy}\Rightarrow\begin{cases}F_x=y^2-x^2\rightarrow F=y^2x-\frac{x^3}{3}+h(y)\\F_y=2xy\rightarrow F=y^2x+g(x)\end{cases}\xRightarrow{\text{با احتمال جواب‌ها}} F(x,y)=y^2x-\frac{x^3}{3}+k$$

یعنی داریم: $y^2x-\frac{x^3}{3}+k=0$ با قرار دادن نقطه $(2,1)$ در این رابطه داریم:

$$2-\frac{8}{3}+k=0\Rightarrow k=\frac{2}{3}$$

پس معادله به صورت $x^3-3xy^2=2$ خواهد بود.

قاعده مشتق‌گیری از توابع پارامتری

چنانچه داشته باشیم $\begin{cases}x=P(t)\\y=Q(t)\end{cases}$ می‌توان نشان داد:

$$\boxed{y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dQ}{dt}}{\frac{dP}{dt}}}$$

قاعده مشتق‌گیری زنجیره‌ای

فرض کنید داشته باشیم:

$$y=h(u)\ ,\ u=m(t)\ ,\ t=f(x)$$

در چنین شرایطی طبیعی است، y قابل بیان بر حسب فقط یک متغیر x خواهد بود که:

$$\boxed{y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}}$$

مثال: اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\sqrt{3}$ باشد. مشتق عبارت $f(1+2\sin x)$ به ازای $x=\frac{\pi}{6}$ را به‌دست آورید؟

حل: عبارت $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\sqrt{3}$ در حقیقت تعریف مشتق تابع در $x=2$ می‌باشد:

$$f'(2)=\sqrt{3}$$

$$y=f(1+2\sin x)\Rightarrow y'=(2\cos x)f'(1+2\sin x)\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\left(2\cos\frac{\pi}{6}\right)f'\left(1+2\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}f'(2)=\sqrt{3}.\sqrt{3}=3$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم:

$$\begin{cases}x=t^2+t+1\\ y=t^3+2t^2-t+2\end{cases}$$

مطلوب است محاسبه $\frac{d^2y}{dx^2}$ در $t=1$:

حل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+4t-1}{2t+1}\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{3t^2+4t-1}{2t+1}\right\}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{3t^2+4t-1}{2t+1}\right\}\cdot\frac{dt}{dx}$$

می‌دانیم $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$

پس:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(6t+4)(2t+1)-2\left(3t^2+4t-1\right)}{(2t+1)^2}\times\frac{1}{2t+1}\Bigg|_{t=1}=\frac{2}{3}$$

توابع معکوس و بحثهای مربوطه:

همان‌طوری‌که می‌دانیم، اگر تابعی مانند $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته و چنانچه اکیداً یک‌نوا باشد ($0<f'(x)$ یا $f'(x)<0$)، آنگاه در این فاصله معکوس‌پذیر است. یعنی می توان تابعی مانند $g(x)$ را به گونه ای یافت که داشته باشیم:

$$fog(x)=gof(x)=x$$

در این صورت $g(x)$ همان $f^{-1}(x)$ خواهد بود.

برای پیدا کردن ضابطه معکوس تابع $y=f(x)$ کافی است از این ضابطه x را برحسب y به‌دست آوریم، یعنی به رابطه ای مانند $x=g(y)$ برسیم. حال می توان ادعا کرد:

$$f^{-1}(x)=g(x)$$

توجه داشته باشید که:

الف) نمودار توابع $f(x)$, $f^{-1}(x)$ نسبت به خط $y=x$ قرینه هم‌دیگرند، یعنی اگر نقطه (a,b) به نمودار $f(x)$ تعلق داشته باشد، نقطه (b,a) به نمودار $f^{-1}(x)$ تعلق دارد.

ب) اگر (a,b) متعلق به تابع $f(x)$ باشند، می دانیم $(b,a)\in f^{-1}(x)$ و داریم:

$$\boxed{\left(f^{-1}(x)\right)'_{(b)}=\frac{1}{f'(a)}}$$

مثال: تابع $f(x)=x-\frac{1}{x}$ با شرط $x>0$ مفروض است. معکوس این تابع محور yها را در چه عرضی قطع می کند؟

حل: نخست ضابطه معکوس این تابع را مشخص می کنیم:

$$y=x-\frac{1}{x}\rightarrow y=\frac{x^2-1}{x}\rightarrow x^2-xy-1=0\rightarrow x=\frac{+y\pm\sqrt{y^2+4}}{2}$$

اما با توجه به شرط $x>0$ داریم:

$$x=\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$$

و معکوس تابع عبارت است از:

$$f^{-1}(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$$

حال نقطه موردنظر را با قرار دادن $x=0$ به‌دست می آوریم:

$$f^{-1}(0)=\frac{0+\sqrt{0+4}}{2}=1$$

مثال: تابع $f(x)=\int_1^{\frac{x}{2}}\sqrt{t^4+1}\,dt$ مفروض است. چنانچه در نقطه ای به طول 0 از نمودار معکوس این تابع، خط مماسی بر نمودار $f^{-1}(x)$ ترسیم شود، معادله خط مماس را بنویسید.

حل: می دانیم:

$$(0,a)\in f^{-1}\Rightarrow(a,0)\in f$$

بنابراین داریم:

$$f(a)=0\rightarrow\frac{x}{2}=1\Rightarrow x=2=a$$

از طرفی داریم:

$$\left(f^{-1}\right)'(0)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{f'(2)}$$

لذا با استفاده از قضیه مشتق گیری از انتگرال داریم:

$$f'(x)=0+\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{x^4}{16}+1}\Rightarrow f'(2)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

می دانیم مشتق در نقطه تماس، شیب خط مماس است. لذا داریم:

$$m=\left(f^{-1}\right)'(0)=\frac{1}{f'(2)}=\sqrt{2}$$

$$y-2=\sqrt{2}(x-0)\rightarrow y=\sqrt{2}\,x+2$$

نکته: با توجه به تعریف توابع هیپربولیک که به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\boxed{\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\quad,\quad \cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}$$

می توان انتظار داشت، معکوس توابع هیپربولیک به صورت توابع لگاریتمی بیان می شود.

مثال: معکوس تابع $\sinh x$ را به‌دست آورید.

حل:

$$y=\frac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{2}$$

$$2y=e^{x}-e^{-x}\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } e^{x}}2e^{x}y=e^{2x}-1\Rightarrow e^{2x}-2ye^{x}-1=0\xrightarrow{e^{x}=z}z^{2}-(2y)z-1=0$$

با توجه به اینکه می‌دانیم $\sqrt{y^{2}+1}>y$ است. لذا قسمت منفی عبارت مورد قبول نمی‌باشد.

$$z=\frac{y\pm\sqrt{y^{2}+1}}{1}\Rightarrow x=\ln\left(y\pm\sqrt{y^{2}+1}\right)$$

$$\rightarrow x=\ln\left(y+\sqrt{y^{2}+1}\right)\Rightarrow f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $f(x)=\log_{3}\left(4^{x}+1\right)$، مطلوب است محاسبه معکوس این تابع.

حل:

$$f(x)=\log_{3}\left(4^{x}+1\right)\rightarrow 3^{y}=4^{x}+1\rightarrow 4^{x}=3^{y}-1\rightarrow x\log 4=\log\left(3^{y}-1\right)\rightarrow x=\frac{\log\left(3^{y}-1\right)}{\log 4}$$

$$x=\log_{4}\left(3^{y}-1\right)\rightarrow f^{-1}(x)=\log_{4}\left(3^{x}-1\right)$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم $f(x)=\int_{1}^{x}\frac{dt}{\sqrt{1+t^{3}}}$، چنانچه معکوس تابع را $g(x)$ بنامیم. حاصل $\frac{g''(x)}{g^{2}(x)}$ را بیابید.

حل:

با مشتق‌گیری از تابع $f(x)$ داریم:

$$fog_{(x)}=f(g(x))=x\rightarrow \text{مشتق‌گیری}\quad g'(x).f'(g(x))=1$$

$$\rightarrow g'(x).\frac{1}{\sqrt{1+(g(x))^{3}}}=1\rightarrow g'(x)^{2}=1+(g(x))^{3}\rightarrow \text{مشتق‌گیری}$$

$$2g'(x)g''(x)=3g^{2}(x)g'(x)\rightarrow \frac{g''(x)}{g^{2}(x)}=\frac{3}{2}$$