برنامه ریزی با اعداد صحیح «LP»

مفروضات یک مدل LP: ۱- فرض تناسب

۲-فرض جمع پذیری

۳-فرض بخش پذیری

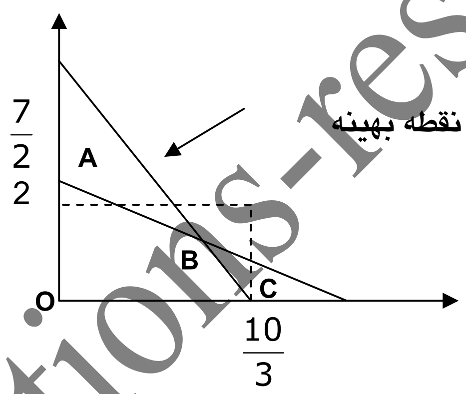
۴- فرض معین بودن

در مدل LP فرض بخش پذیری را نداریم.

روش حل اول: گرد کردن جوابها

مساله LP را بدون در نظر گرفتن شرط عدد صحیح بودن حل نموده و سپس جوابها را گرد می کنیم.

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = 5x_1 + 3x_2 \\
&s.t: \\
&3x_1 + x_2 \le 10 \\
&x_1 + 2x_2 \le 7 \\
&x_1, x_2 \ge 0, Int.
\end{aligned}
$$



نقطه	مختصات	مقدار Z
O	$(0,0)$	0
A	$(0,\frac{7}{3})$	$\frac{21}{3}$
B	$(\frac{13}{5},\frac{11}{5})$	$\frac{98}{3}$ ✓
• C	$(\frac{10}{3},0)$	$\frac{5}{3}$

$$x_1^* = \frac{13}{5} = 2/6 \approx 3$$

$$x_2^* = \frac{11}{5} = 2/1 \approx 2$$

$$Z_{IP}^* = 5(3) + 3(2) = 21$$

ایراد وارد به این روش آنست که ممکن است جواب انتخابی LP ناموجه باشد و هنگامی که مساله دارای چندین متغیر باشد نمی توانیم آنرا تشخیص دهیم اما تشخیص این امر در روش ترسیمی امکان پذیر است. نقطه بهینه انتخابی اشتباه است و نمی توان به این روش اعتماد کرد. (نقطه بهینه روی نمودار صفحه قبل)

روش دوم: شمارش کامل جوابهای صحیح

این روش برای مسائل کوچک و دومتغیره قابل استفاده می‌باشد که طی آن ابتدا مساله را باروش ترسیمی حل و سپس کلیه نقاط با عدد صحیح در ناحیه را انتخاب می‌کنیم از قرار دادن جوابها در تابع هدف Z بهینه خواهد شد. برای مثال داریم:

$$
\begin{aligned}
Z &= 5(0)+3(3)=9\\
&= 5(1)+3(3)=14\\
&= 5(2)+3(2)=16\\
&= 5(3)+3(1)=18 \quad \checkmark\\
&= 5(3)+3(0)=15
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
Z_{IP}^{*}=18\\
x_1^{*}=3\\
x_2^{*}=1
\end{cases}
$$

هنوز برای مسائل برنامه ریزی عدد صحیح روشی قطعی مانند الگوریتم سیمپلکس ارائه نشده است. و تحقیقات در زمینه حل مسائل برنامه ریزی LP اشاره خواهیم نمود. پیش از پرداختن به حل با الگوریتم ها لازم است مدلهای برنامه ریزی عدد صحیح را دسته بندی کنیم:

۱- اگر تمامی متغیرهای برنامه ریزی شرط عدد صحیح بودن را داشته باشند می گوییم با برنامه ریزی عدد صحیح محض روبرو هستیم.

۲- هرگاه در مدلی فقط تعدادی از متغیرها شرط صحیح بودن را داشته باشند می گوئیم با مساله برنامه ریزی عدد صحیح مختلط روبرو هستیم.

۳- اگر متغیرهای یک مساله برنامه ریزی عدد صحیح فقط مقادیر صفر یا یک به خود نگیرد می گوئیم با حالت خاص برنامه ریزی عدد صحیح که آنرا برنامه ریزی صفر و یک می نامند روبرو هستیم.

الگوریتم اول حل مسائل عدد صحیح

-الگوریتم انشعاب و تحدید $Branch\ and\ Bound \rightarrow Band\ B$

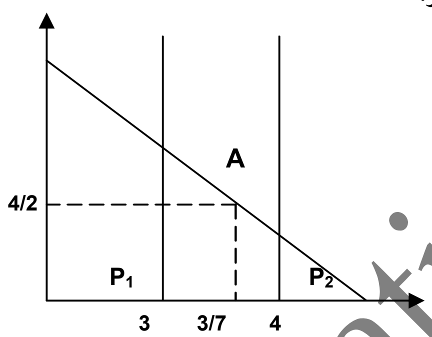
در این روش که در سال ۱۹۶۰ توسط Doing و Land ارائه گردید. ابتدا مساله را بدون در نظر گرفتن شرط صحیح بودن حل می کنند. آنگاه از بین متغیرهایی که جواب صحیح ندارند یکی از متغیرها را انتخاب می کنند مسلماً از بین بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از مقدار بهینه متغیر انشعاب که آنرا L می نامیم و از L+1 که مدنظر ما قرار می گیرند فضایی بوجود می آید که در این فضا هیچ جواب عدد صحیحی وجود ندارد. لذا اگر متغیر انشعاب xj باشد دو محدودیت

$xj \le L$, $xj \ge L+1$ به ترتیب به مدل اضافه شده و مجدداً هریک از مدل های جدید حل می شوند این عمل تا جایی که :

- ✓ ۱–به یک جواب موجه LP برسیم.
- ✓ و ۲–هیچ ناحیه موجهی باقی نماند. ادامه می یابد و هرگاه یکی از این دو حالت پیش آمد به منزله تحدید خواهد بود.

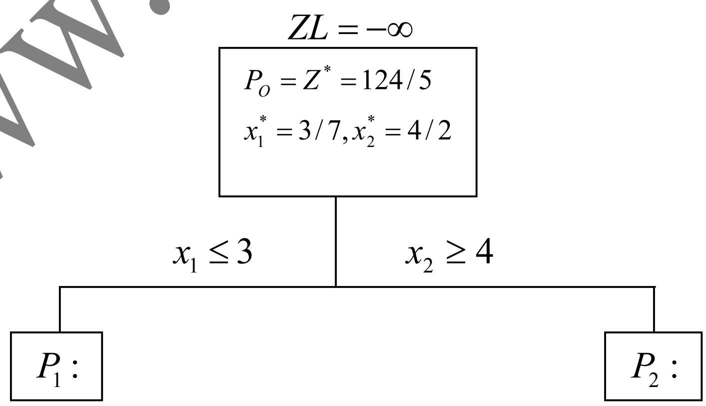
فرض کنید برای یک مساله مفروض نقطهٔ A با مختصات (۴/۲و۳/۷) جواب بهینه LP می باشد اگر متغیر x_1 به دلخواه برای انشعاب انتخاب شود بین بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از ۳/۷ یعنی ۳ و عدد بعدی یعنی ۱+۳ هیچ جواب موجه صحیحی وجود ندارد لذا این ناحیه را حذف و با دو مساله جدید P_1 , P_2 روبرو می شویم.

برای حل یک مساله با استفاده از روش انشعاب و تحدید که مساله دو متغیره می باشد از روش ترسیمی و اگر چند متغیره باشد از روش سیمپلکس استفاده کنید. قدم های حل مساله عبارتند از:



قدم اول: مساله را بدون توجه به صحیح بودن متغیرها حل کنید. اگر به جواب صحیح رسیدید توقف نمایید در غیر اینصورت به قدم دوم بروید.

قدم دوم: برای جلوگیری از گمشدگی اطلاعات به ازاء هر مساله ای که حل می کنید (مساله اصلی و مسائل فرعی انشعاب) مستطیلی را در نظر بگیرید و مقدار تابع هدف و مقدار متغیرها را بهمراه شماره مساله p_i در آن بیاورید برای حل مساله اصلی p_o را انتخاب کنید.



مسلماً همواره $Z^*IP \le Z^*LP$ می باشد و اگر یک مساله Max سازی داشته باشیم می توان گفت بدترینZ که انتظار داریم$(ZL = -\infty)$ خواهد بود همچنین در مسائل Min سازی بدترین Z مورد انتظار و برای LP $(Z = +\infty)$خواهد بود. این مقدار را بر روی مستطیل p_0 می نویسند و زمانی که به جواب بهتری رسیدند این عدد را خط زده و جواب بهتر را جایگزین می کنند.

قدم سوم: یکی از متغیرهای تصمیم را که دارای مقدار عدد صحیح نیست انشعاب کنید و آنرا متغیر انشعاب بنامید آنگاه دو محدودیت زیر را اضافه کنید و دو مساله جدید بسازید:

$xj \ge L+1$

$xj \le L$

قدم چهام: این قدم بنام قدم تحدید شناخته می شود و طی آن مسائل جدیدی را که بوجود آورده ایم را حل می کنیم اگر به جواب موجه جدید دست یافتیم که مقدار آن بهتر از Z_L بود جایگزین نمایید و یا اینکه اگر با یکی از شروط زیر روبرو شده اید به عمق رسیده اید و مساله را متوقف کنید. انشعاب ها در یکی از سه حالت زیر به عمق می رسند و دیگر آن انشعاب را ادامه نمی دهیم:

۱-مقدار تمامی متغیرها عدد صحیح گردد یا به یک جواب موجه عدد صحیح برسیم.

۲-مساله فرعی فاقد ناحیه موجه باشد.

۳-مقدار Z موجه بدست آمده در انشعاب بدتر از Z_L فعلی باشد.

قدم پنجم: اگر تمامی انشعاب ها به عمق رسیدند مساله را متوقف کنید. و مستطیلی را که مقدار تابع هدفش مساوی Z_L است بعنوان جواب بهینه انتخاب کنید.

مسائل چند متغیره: اگر یک مساله چند متغیره LP دارید به یکی از روشهای زیر عمل کنید:

۱- p_0 را به روش سیمپلکس حل کنید انشعاب را انجام دهید مسائل p_2 و p_1 را مجدداً به روش سیمپلکس حل کنید و ... ایراد این روش آنست که بسیار وقت گیر است.

۲- p_0را به روش سیمپلکس حل کنید سپس از تحلیل حساسیت برای اضافه شدن محدودیت جدید استفاده کنید اگر محدودیت جدیدی (یعنی $xj \le L$ یا$xj \ge L+1$) زائد باشند آنرا در حل مدل تاثیر ندهید و در صورتی که مؤثر باشند آنرا به مساله اضافه و مجدداً مساله جدیدی را حل کنید این عمل را تا رسیدن به جواب بهینه طبق الگوریتم انشعاب و تحدید ادامه دهید.

۳–مساله p_0 را به روش سیمپلکس حل کنید بجای اضافه نمودن محدودیتهای جدید به مساله از روش تغییر متغیر استفاده نمایید و مسائل جدید را مجدداً حل کنید این عمل را تا رسیدن به جواب بهینه نهایی ادامه دهید. بنظر می رسد که روش سوم یعنی تغییر متغیر برای مسائل چند متغیره بهتر و کاراتر از دو روش دیگر باشد با این حال هنگام حل مساله با نرم افزارهای مختلف می توان بکارگیری هریک از این ها را مشاهده کرد.

مثال: مدل برنامه ریزی عدد صحیح زیر مفروض است با استفاده از روش انشعاب و تحدید جواب بهینه را بدست آورید:

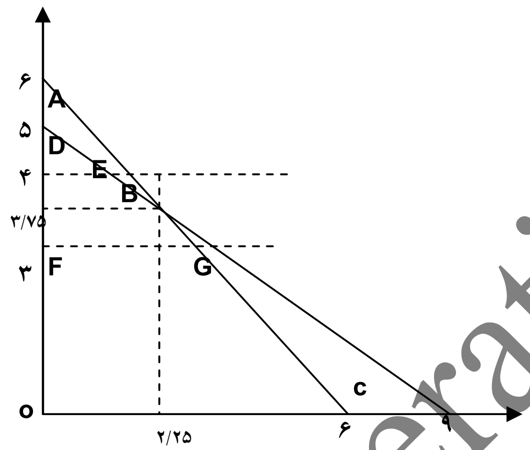
P_0 :

$$
\begin{aligned}
&MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\
&st \\
&x_1 + x_2 \le 6 \\
&5x_1 + 2x_2 \le 45 \\
&x_1, x_2 \ge 0, Int
\end{aligned}
$$

بدون در نظر گرفتن شرط عدد صحیح بودن مساله را حل می کنیم:

بین ۳ و ۴ هیچ عدد صحیحی وجود ندارد

پس این فاصله حذف می شود.



نقطه	مختصات	مقدارZ
O	$(0,0)$	0
A	$(0,5)$	40
B	$(2/25,3/75)$	41/25
C	$(0,6)$	30

برای انشعاب متغیر x_2 را انتخاب می کنیم.

$P_1:$

$$\begin{aligned} & MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\ & st \\ & x_1 + x_2 \le 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ & x_2 \ge 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0, Int \end{aligned}$$

$P_2:$

$$\begin{aligned} & MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\ & st \\ & x_1 + x_2 \le 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0, Int \end{aligned}$$

به روش ترسیمی p1 و p2 را حل می کنیم: مختصات روی شکل صفحه قبل:

نقطه	مختصات	مقدار Z
D	$(0,4)$	32
E	$(1/8,4)$	41✓
A	$(0,5)$	40

نقطه	مختصات	مقدار Z
O	$(0,0)$	0
F	$(0,3)$	24
G	$(3,3)$	39✓
C	$(6,0)$	30

انشعاب بعدی را بایستی بر روی x_1 بدهیم: و مسائل جدید را p3 و p4 می نامیم:

$P_3:$

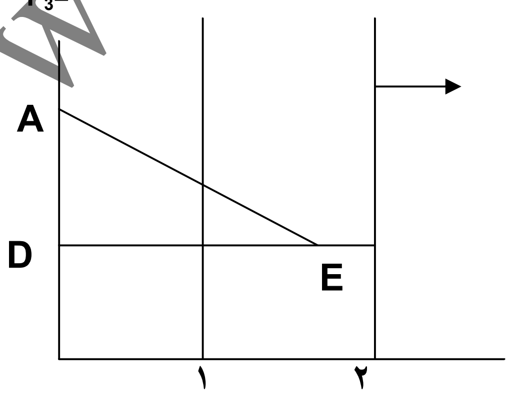
$$\begin{aligned} & MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\ & st \\ & x_1 + x_2 \le 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ & x_2 \ge 4 \\ & x_1 \ge 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0, Int \end{aligned}$$

$P_4:$

$$\begin{aligned} & MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\ & st \\ & x_1 + x_2 \le 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ & x_2 \ge 4 \\ & x_1 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0, Int \end{aligned}$$

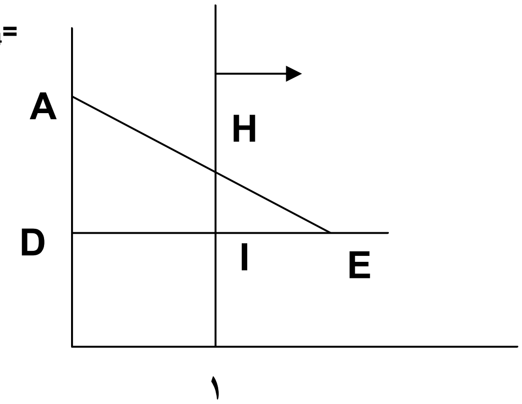
جواب بهینه عدد صحیح در ناحیه فوق نداریم ← فاقد جواب است.

P3=



فاقد جواب=P3

P4=



P4=

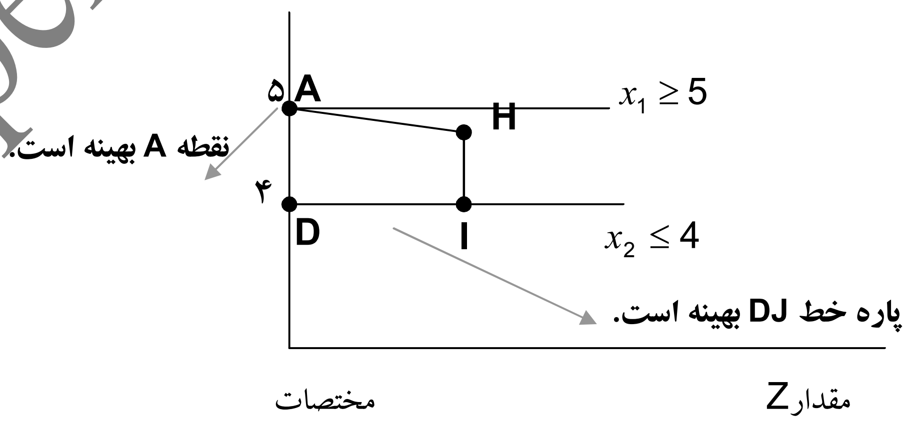
نقطه	مختصات	مقدار Z
D	$(0,4)$	32
A	$(0,5)$	40
H	$(1,4/45)$	$40/6\checkmark$
I	$(1,4)$	37

P_5 :

$$\begin{aligned} MaxZ &= 5x_1 + 8x_2 \\ st & \\ x_1 + x_2 &\le 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\le 45 \\ x_2 &\le 4 \\ x_1 &\ge 1 \\ x_2 &\ge 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0, Int \end{aligned}$$

P_6 :

$$\begin{aligned} MaxZ &= 5x_1 + 8x_2 \\ st & \\ x_1 + x_2 &\le 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\le 45 \\ x_2 &\ge 4 \\ x_1 &\le 1 \\ x_2 &\le 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0, Int \end{aligned}$$



نقطه	مختصات	مقدار Z
A	$(0,5)$	40
D	$(0,4)$	32
I	$(1,4)$	37

$Z = -\infty$

۸

p_0 :

$Z = 41/25 \quad x_1 = 2/25$

$x_2 = 3/75$

این جواب را نمی پذیریم زیرا Z آن از Z بهینه کمتر است.

37<40

جواب بهینه:
$$\begin{cases} Z_{IP}^* = 40 \\ x_1^* = 0 \\ x_2^* = 5 \end{cases}$$

حل مدل به روش سیمپلکس

مساله قبل یعنی p_0 را بدون در نظر گرفتن شرط عدد صحیح بودن متغیرهای تصمیم به روش سیمپلکس حل می کنیم:

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS

Z	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$41\frac{1}{4}$
X_1	1	0	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$
X_2	0	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$3\frac{3}{4}$

$P_0:$

$$MaxZ = 5x_1 + 8x_2$$

$$st$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \geq 0, Int$$

اگر بخواهیم مدل فوق را با سیمپلکس معمولی تا آخر حل کنیم بایستی هریک از مسائل p_1, p_2 و تا p_6 را که در روش ترسیمی نوشتیم بصورت جداگانه و با روش سیمپلکس حل کنیم. یعنی عملاً ۶ بار بایستی عملیات سیمپلکس را تا تحقق شرط بهینگی تکرار کنیم. اگر بخواهیم از روش تحلیل حساسیت پیش برویم عملیات نسبت به روش قبل اندکی ساده تر است. اما مشکل اضافه شدن به محدودیت مؤثر بعنوان یک سطر اضافی در تابلو وجود دارد. برای آشنایی یک تکرار از عملیات را برای تحلیل حساسیت نمایش می دهیم.

در تابلوی نهایی p_0 متغیری را که بزرگترین عدد اعشار را دارد برای انشعاب انتخاب می کنیم. متغیر x_2 خواهد بود. $x_2=3\frac{3}{4}$، محدودیتهای ناشی از انشعاب را می نویسیم:

$$x_2 = 3\frac{3}{4} \rightarrow \begin{cases} x_2 \geq 4 \\ \\ x_2 \leq 3 \end{cases}$$

جواب بهینه را در هریک از محدودیتها قرار می دهیم و محدودیت زائد را کنار گذاشته و محدودیت مؤثر را انتخاب و به تابلوی نهایی اضافه می‌کنیم و با تحلیل حساسیت محدودیت اضافه شده به مدل، یکه کردن سطر جدید را برای متغیرهای پایه انجام می دهیم شرط موجه بودن نقض می گردد. آنرا با استفاده از سیمپلکس ثانویه ایجاد می کنیم.

«از آنجاییکه این روش مستلزم صرف منابع بالایی است لذا توصیه نمی شود»

روش سوم:

در این روش از تغییر متغیر استفاده می کنیم بدین صورت که محدودیت های ناشی از انشعاب را نوشته و آنها را با ۲ متغیر جدید بنامهای y_j به شکل محدودیت تساوی در آورده و تغییر لازم را در تابلوی نهایی می دهیم در صورت نقض شرط موجه بودن با سیمپلکس ثانویه عملیات را ادامه خواهیم داد.

جواب بهینه p_0 را در اختیار داریم با انتخاب x_2 بعنوان متغییر انشعاب و اضافه شدن محدودیتهای جدید دو مساله p_2 , p_1 بوجود می آیند برای p_1 از قبل داریم: $x_2 \geq 4$

و برای p_2 داریم: $x_2 \leq 3$

می توان با متغیر y_2 آنها را به شکل تساوی درآورد:

برای p_1 : $x_2 = 4 + y_2$

برای p_2 : $x_2 = 3 - y_2$

$$p_1: \quad x_2 \geq 4 \;\downarrow\; x_2 = 4 + y_2 \qquad\qquad p_2: \quad x_2 \leq 3 \;\downarrow\; x_2 = 3 - y_2$$

در تابلوی نهایی p_0، x_2 را با $y_2 + 4$ جایگزین می کنیم آنگاه تابلوی p_1 بدست می آید:

بجای $x_2 \leftarrow y + 4$ قرار داده و سطر سوم را محاسبه می کنم:

شرط صحیح بودن فقط برای xj هاست.

با سیمپلکس ثانویه ادامه می دهیم $\leftarrow$

(شرط موجه بودن نقض شده)

	X_1	y_2	$\downarrow$ S_1	S_2	RHS
Z	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$41\frac{1}{4}$
X_1	1	0	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$
$\leftarrow y_2$	0	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
Z	0	1	0	1	41
X_1	1	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$
S_1	0	$\frac{-4}{5}$	1	$\frac{-1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{9}{5} = 1/8 \\ x_2^* = 4 + y_2 = 4 + 0 = 4 \\ Z^* = 41 \end{cases}$$

چون Y_2 در پایه نیست، صفر است.

نکته:«همواره این رابطه $Z_{LP}^* \geq Z_{IP}^*$ برقرار است»

برای رسیدن به مساله p_2 در تابلوی نهایی p_0 بایستی x_2 را با $3 - y_2$ جایگزین کنیم:

	X_1	y_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$41\frac{1}{4}$
X_1	1	0	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$
$\leftarrow y_2$	0	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
Z	0	3	5	0	39
X_1	1	-1	1	0	3
S_1	0	-4	-5	1	3

$$\begin{cases} x_1^* = 3 \\ x_2^* = 3 \\ Z^* = 39 \end{cases}$$

$\uparrow$«به عمق رسیده است»

انشعاب را از p_1 ادامه خواهیم داد بنابراین تابلوی مرجع ما تابلوی p_1 خواهد بود.

تابلوی $p_1 \leftarrow$

	X_1	y_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	1	0	1	41
X_1	1	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$
S_1	0	$\frac{-4}{5}$	1	$\frac{-1}{5}$	$\frac{1}{5}$

p_3: $x_1 \geq 2 \rightarrow x_1 = 2 + y_1$

p_4: $x_1 \leq 1 \rightarrow x_1 = 1 - y_1$

در روی تابلوی p_1 نهایی متغیری را که دارای بزرگترین مقدا اعشاری بدون متغیر انشعاب انتخاب کنید دراینجا x_1 بعنوان متغیر انشعاب انتخاب میشود که‌تنها متغیر واجد شرایط است:

p_1 :

	X_1	y_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	1	0	1	41
X_1	1	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$
S_1	0	$\frac{-4}{5}$	1	$\frac{-1}{5}$	$\frac{1}{5}$

p_3 :

	y_1	y_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	1	0	1	41
y_1	1	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{-1}{5}$
S_1	0	$\frac{-4}{5}$	1	$\frac{-1}{5}$	$\frac{1}{5}$

متغیر ورودی نداریم مساله فاقد جواب موجه است.

p_4 :

	y_1	y_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	1	0	1	41
y_1	1	$-\frac{9}{5}$	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{1}{5}$
S_1	0	$\frac{-4}{5}$	1	$\frac{-1}{5}$	$\frac{1}{5}$
Z	$\frac{5}{9}$	0	0	$\frac{8}{9}$	$40\frac{5}{9}$
y_2	$-\frac{5}{9}$	1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
S_1	$\frac{-4}{9}$	0	1	$\frac{-1}{9}$	$\frac{5}{9}$

$$\begin{cases} x_1^* = 1 - y_1 = 1 - 0 = 1 \\ x_2^* = 4 + y_2 = 4 + \frac{4}{9} = 4/45 \\ Z = 40/6 \end{cases}$$

انشعاب را از p_4 ادامه می دهیم همانگونه که در جوابها مشخص است تنها متغیر مورد نظر برای انشعاب x_2 خواهد بود

لذا مساله p_5 و p_6 به شکل زیر تشکیل می گردند.

$$p_4: \quad x_2 \ge 5 \;\downarrow\; x_2 = 5 + y'_2 \qquad\qquad p_5: \quad x_2 \le 4 \;\downarrow\; x_2 = 4 - y'_2$$

در تابلوی نهائی p_4 با جایگزینی $x_2 = 5 + y'_2$ به تابلوی p_5 می رسیم.

از آنجایی که در مراحل قبل از y_2 استفاده شده بود در اینجا y'_2 را بکار می بریم.

p_4 :

	y_1	y_2	S_1	S_2	RHS
Z	$\frac{5}{9}$	0	0	$\frac{8}{9}$	$40\frac{5}{9}$
y_2	$-\frac{5}{9}$	1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
S_1	$-\frac{4}{9}$	0	1	$\frac{-1}{9}$	$\frac{1}{5}$

p_5 :

	y_1	y'_2	S_1	S_2	RHS
Z	$\frac{5}{9}$	0	0	$\frac{8}{9}$	$40\frac{5}{9}$
$\leftarrow y'_2$	$-\frac{5}{9}$	1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{-5}{9}$ *
S_1	$-\frac{4}{9}$	0	1	$\frac{-1}{9}$	$\frac{1}{5}$
Z	**0**	1	0	$\frac{7}{9}$	40
y_1	**1**	$-\frac{9}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	1

p_6 :

	y_1	y'_2	S_1	S_2	RHS
Z	$\frac{5}{9}$	0	0	$\frac{8}{9}$	$40\frac{5}{9}$
y'_2	$\frac{5}{9}$	1	0	$\frac{-1}{9}$	$-\frac{4}{9}$
S_1	$-\frac{4}{9}$	0	1	$\frac{-1}{9}$	$\frac{5}{9}$
Z	$\frac{35}{9}$	8	0	0	37
S_2	-5	-9	0	1	4

S_1	**0**	$-\frac{4}{5}$	1	$\frac{1}{45}$	1

S_1	-1	-1	1	0	1

$$x_2 = 4 + y_2 \rightarrow y_2 = x_2 - 4$$

ابتدا y را به x2 برمی گردانیم پس به y' تبدیل می کنیم:

$$-\frac{5}{9}y_1 + x_2 - 4 + \frac{1}{9}S_2 = \frac{4}{9}$$

$$-\frac{5}{9}y_1 + x_2 + \frac{1}{9}S_2 = \frac{4}{9} + 4 = \frac{40}{9}$$

$$-\frac{5}{9}y_1 + 5 + y'_2 + \frac{1}{9}S_2 = \frac{40}{9}$$

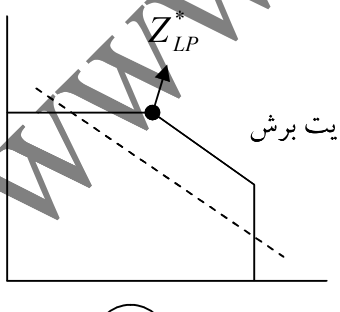
$$-\frac{5}{9}y_1 + y'_2 + \frac{1}{9}S_2 = \frac{40}{9} - 5$$

$$-\frac{5}{9}y_1 + y'_2 + \frac{1}{9}S_2 = -\frac{5}{9} *$$

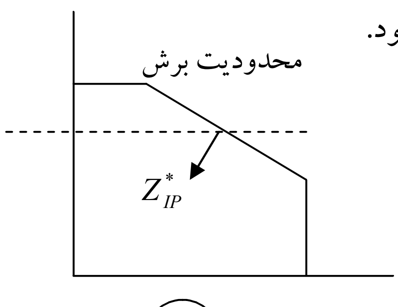
روش صفحه برش گموری

Gomory Cutting Plane

یکی از مشکلاتی که در روش انشعاب و تحدید وجود داشت انتخاب متغیر انشعاب و اضافه شدن محدودیتهای جدید بود ما می توانیم این مساله را با استفاده از روش پیشنهادی آقای گموری برطرف کنیم. بدین صورت که پس از حل مساله با روش ترسیمی یا سیمپلکس و بدون در نظر گرفتن شرط صحیح بودن جواب بهینه بدست می آید. آنگاه در هر تکرار با استفاده از خطی که آنرا محدودیت برش می نامند بخشی از صفحه را به گونه ای برش می دهیم که هیچ جواب موجه عدد صحیحی در ناحیه برش خورده وجود نداشته باشد و ما را به جواب عدد صحیح نزدیک نماید (بی تردید برش در صفحه مقدار تابع هدف را کاهش می دهد) نمونه هایی از محدودیت های برش در شکل زیر که منجر به رسیدن از Z^*_{LP} فرضی به Z^*_{IP} فرضی است دیده می شود.



۱



۲

اولین چیزی که در شکل فوق نظر شما را جلب می کند آنست که محدودیتهای برش برچه مبنایی رسم شده اند؟

برای رسم محدودیتهای برش ضروری است تا معادله خط برش را داشته باشیم که آنرا محدودیت برش نیز می نامند.

معادله خط برش که توسط آقای گموری اثبات گردید برابر است با:

$$-\sum [aij]_F \quad Wj + Sgi = -[bi]_F$$

در این رابطه: Wj نشان دهنده متغیرهای غیرپایه

$[aij]_F$ نشان دهنده جزء کسری ضریب متغیرهای غیرپایه

$[bi]_F$ نشان دهنده جزء کسری مقادیر سمت راست

Sgi نشان دهنده متغیر کمکی گموری می باشد.

پس از آشنایی با معادله خط برش ابتدا ضروری است تا بدانیم این معادله به چه طریق توسط گموری اثبات شده است و سپس نحوه استفاده از آن را یاد بگیریم.

اثبات معادله خط برش یا محدودیت گموری :

فرض کنید تابلوی زیر تابلوی نهایی مربوط به یک مساله مفروض است که در آن V_1 تا V_m نشان دهنده متغیرهای پایه و W_1 تا W_n نشان دهنده متغیرهای غیرپایه می باشد.

	W_1 W_2 … W_n	V_1 V_2 … V_n	R.H.S
Z	$\overline{C}j \geq 0$	0 0 0	y_0
V_1	a_{11} a_{12} ….. a_{1n}	1 0 0	b_1
V_2	a_{21} a_{22} ….. a_{2n}	0 1 0	b_2
.	.	. . .	.
.	.	. . .	.
.	.	. . .	.
V_m	a_{m1} a_{m2} ….. a_{mn}	0 0 1	b_m

می توانیم سطر i ام این تابلو را در خارج از تابلو به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$a_{i1}\omega_1 + a_{i2}\omega_2 + \ldots + a_{in}\omega_n + V_i = bi$$

معادله شماره (۱) ⟵

$$\sum_{j=1}^{n} aij\omega j + Vi = bi$$

می دانیم که هر عدد را می توان بصورت مجموع جزء صحیح و جزء کسری آن عدد در نظر گرفت. همچنین می دانیم که جزء کسری هر عدد، عدد مثبت بین صفر و یک می باشد. و برای تعیین جزء صحیح و جزء کسری بشرح زیر عمل می کنیم:

هر عدد را در نظر بگیرید؛ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از آن عدد بعنوان جزء صحیح و فاصله آن عدد تا جزء صحیح بعنوان جزء کسری پذیرفته می شود.

برای عدد $5\frac{2}{3}$ جزء صحیح و جزء کسری عبارتند از:

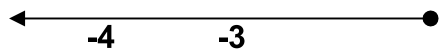
5: جزء صحیح

$\frac{2}{3}$: جزء کسری

$$5\frac{2}{3} = [5]_I + \left[\frac{2}{3}\right]_F$$

برای هریک از اعداد زیر جزء کسری و جزء صحیح آنرا بنویسید.

جزء کسری	جزء صحیح	عدد
$\frac{3}{10}$	2	$2\frac{3}{10}$
0	4	4
$\frac{3}{4}$	-4	$-3\frac{1}{4}$
0	-5	-5
0/2	0	0/2
0/6	-1	-0/4



جزء کسری همیشه عددی مثبت است.

در معادله شماره یک aij ها و bi ها عدد می باشند لذا می توان آنها را به شکل مجموع جزء صحیح و جزء کسری نوشت:

$$aij = [aij]_I + [aij]_F$$

$$bi = [bi]_I + [bi]_F$$

و می دانیم که:

$$0 \le [aij]_F < 1$$

$$0 \le [bi]_F < 1$$

اینک با روابطی که داریم می توان معادله (۱) را به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$\sum_{j=1}^{n}[aij]_I + [aij]_F Wj + Vi = [bi]_I + [bi]_F$$

یا

$$\sum_{j=1}^{n}[aij]_I Wj + \sum_{j=1}^{n}[aij]_F Wj + Vi = [bi]_I + [bi]_F$$

می دانیم که جواب مساله بایستی عدد صحیح باشد لذا مقادیر صحیح بهمراه متغیر پایه Vi به سمت چپ و مقادیر کسری را به سمت راست انتقال می دهیم:

$$\sum_{j=1}^{n}[aij]_I\ Wj - [bi]_I + Vi \ = \ [bi]_F - \sum_{j=1}^{n}[aij]_F\ Wj$$

بنابراین سمت چپ معادله جدید یک عدد صحیح خواهد بود از آنجاییکه دو طرف با همدیگر مساوی هستند بنابراین بایستی سمت راست معادله نیز عدد صحیح باشد.

می دانیم که $W_j \ge 0$ می باشد همچنین جزء کسری $0 \le [aij]_F < 1$ قرار دارد آنگاه حاصل $[aij]_F W_j \ge 0$ خواهد بود. در سمت راست معادله ملاحظه می کنیم این مقدار غیرمنفی از $[bi]_F$ کسر شده و حاصل عددی صحیح است. لذا این عدد صحیح الزاماً صفر یا منفی خواهد بود. بنابراین می توانیم قرار دهیم:

معادله شماره (۲) $\qquad [bi]_F - \sum_{i=1}^{n}[aij]_F W_j \le 0$

اینک می توان نامعادله(۲) را به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$-\sum_{j=1}^{n}[aij]_F W_j \le -[bi]_F$$

و با اضافه نمودن متغیر کمکی گموری Sgi ، آنرا به شکل زیر درآورد:

$$-\sum_{j=1}^{n}[aij]_F Wj + Sgi = -[bi]_F$$

بدین ترتیب محدودیت گموری اثبات می گردد.

اینک که با اثبات محدودیت برش آشنا شدیم بایستی نحوه استفاده از آنرا طی الگوریتم حل مسائل عدد صحیح با روش برش یا گموری بیاموزیم.

الگوریتم صفحات برش:

قدم اول: در مسئله خود aij ها و bi ها قبل از شروع به حل کنترل نمایید تا به شکل عدد صحیح باشد. محدودیت شماره (۲) مساله ای به شکل زیر می باشد:

$$(۲)\ 3x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \le \frac{1}{5}$$

نمی توان بخاطر ضرایب غیرصحیح aij و bi مساله را با روش برش حل نمود. لذا از کوچکترین مضرب مشترک برای تبدیل آنها به عدد صحیح استفاده می کنیم.

$$\xrightarrow[\times 60]{\text{ک.م.م}=60} 180x_1 + 15x_2 + 40x_3 \le 12$$

قدم دوم: مساله را بدون در نظر گرفتن شرط عدد صحیح بودن متغیرها حل کنید و جواب بهینه را بدست آورید. اگر جواب بهینه عدد صحیح است توقف کنید در غیر این صورت به قدم سوم بروید.

قدم سوم: محدودیتی را که در تابلوی نهایی جواب بهینه متغیر پایه آن مقدار غیرصحیح است انتخاب و محدودیت برش را برای آن بنویسید. محدودیت برش را به جدول نهایی اضافه و با سیمپلکس ثانویه جواب بعدی را پیدا کنید و به گام دوم بازگردید.

مثال: برنامه ریزی برای شرکت تولیدی در قالب مدل LP زیر ارائه شده است جواب بهینه را با استفاده از روش برش بدست آورید.

$$\begin{aligned}
&Max\ Z = 2x_1 + 8x_2\\
&(1)\quad 2x_1 - 6x_2 \le 3\\
&(2)\quad -x_1 + 4x_2 \le 5\\
&(3)\quad 2x_1 + 2x_2 \le 13\\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0, Int
\end{aligned}$$

جدول بهینه مساله به شکل زیر می باشد:

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	0	0	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{134}{5}$

S_1	0	0	1	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{42}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\leftarrow \frac{22}{10}=2/3$ متغیرانتخابی برای نوشتن محدودیت برش
X_1	**1**	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{21}{5}=2/1$

از قدم سوم:

از بین قادیر سمت راست برای متغیرهای دارای شرط عدد صحیح متغیری را که بیشترین جزء کسری را دارد انتخاب نمایید و محدودیت برش را برای آن بنویسید:

$$1x_2+\frac{1}{5}S_2+\frac{1}{10}S_3=2\frac{3}{10}=2/3$$

متغیر پایه   متغیرغیرپایه(معادل wj در معادله‌برش)

$$-\left[\frac{1}{5}S_2+\frac{1}{10}S_3\right]+Sg_1=-\left[\frac{3}{10}\right]$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{5}S_2-\frac{1}{10}S_3+Sg_1=-\frac{3}{10}$$

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	Sg_1	RHS
Z	0	0	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{8}{5}$	0	$\frac{134}{5}$
S_1	0	0	1	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{42}{5}$
X_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{23}{10}$
X_1	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{21}{5}$
$Sg_1\leftarrow$	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	1	$-\frac{3}{10}$
Z	0	0	0	0	1	6	25
S_1	0	0	1	0	-1	8	6
X_2	0	1	0	0	0	1	2
X_1	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{45}{10}$
S_2	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	-5	$\frac{3}{2}$

محدودیت برش X_1 است:

$$1x_1+\frac{1}{2}S_3-Sg_1=\frac{45}{10}$$

$$-\left[\frac{1}{2}S_3+0Sg_1\right]+Sg_2=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}S_3-Sg_2=0/5$$

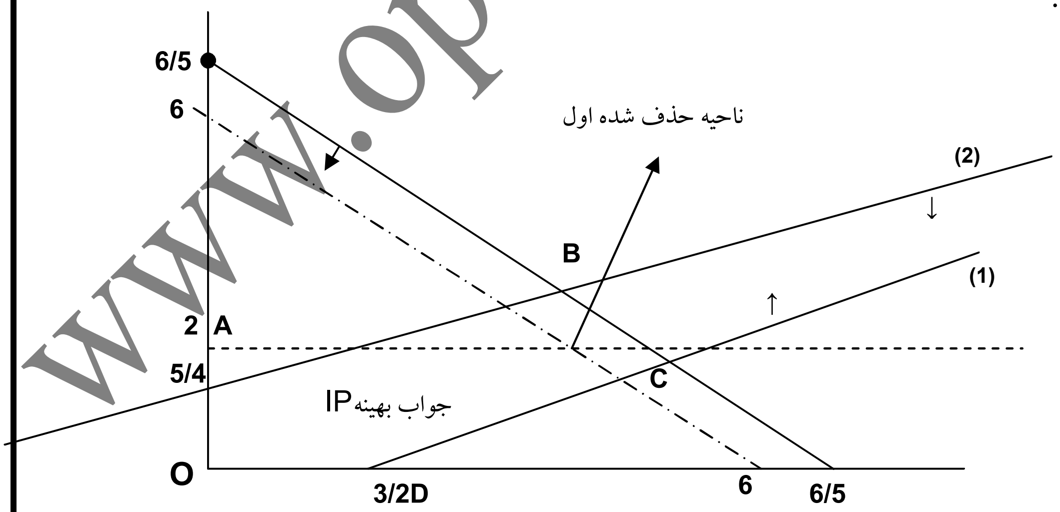
$$-\frac{1}{2}S_3+Sg_2=-0/5=-\frac{1}{2}$$

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	Sg_1	Sg_2	RHS
Z	0	0	0	0	1	6	0	25
S_1	0	0	1	0	-1	8	0	6
X_2	0	1	0	0	0	1	0	2
X_1	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{45}{10}$
S_2	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	-5	0	$\frac{3}{2}$
Sg_2	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$
Z	0	0	0	0	0	6	2	24
S_1	0	0	1	0	0	8	-2	7
X_2	0	1	0	0	0	1	0	2
X_1	1	0	0	0	0	-1	1	4
S_2	0	0	0	1	0	-5	1	1
S_3	0	0	0	0	1	0	-2	1

$$\begin{cases} Z^*=24 \\ x_1^*=4 \\ x_2^*=2 \end{cases}$$

اینک می خواهیم نحوه رسم محدودیتهای برش را در فضای موجه مساله دوبعدی شاهد باشیم:

نقطه B جواب بهینه LP است.



(1) ≤ 3

(2) $\leq 5 \rightarrow -x_1 + 4x_2 + S_2 = 5$

(3) $\leq 13 \rightarrow 2x_1 + 2x_2 + S_3 = 13$

در محدودیت برش اول قرار می دهیم.

*) $S_2 = 5 + x_1 - 4x_2$

$S_3 = 13 - 2x_1 - 2x_2$

$$-\frac{1}{2}S_3 + Sg_2 = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{5}S_2 - \frac{1}{10}S_3 + Sg_1 = -\frac{3}{10}$$

$$-\frac{1}{5}(5 + x_1 - 4x_2) - \frac{1}{10}(13 - 2x_1 - 2x_2) \leq -\frac{3}{10}$$

معادله خط برش اول $x_2 \leq 2$

$$-\frac{1}{2}(13 - 2x - 2x_2) \leq -\frac{1}{2}$$

معادله خط برش دوم $x_1 + x_2 \leq 6$

$$Max\ Z = 3x_1 + \frac{10}{3}x_2$$

$S.t$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 40$$

$$x_1 - \frac{3}{4}x_2 \leq 9 \xrightarrow{\times 4} 4x_1 + 3x_2 \leq 36$$

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 8 \xrightarrow{\times 2} 2x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0, Int$$

تابلوی اول سیمپلکس

	x_1	↓ x_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	-3	$-\frac{10}{3}$	0	0	0	0
S_1	3	4	1	0	0	40
S_2	4	3	0	1	0	36
S_3	2	1	0	0	1	16
Z	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{5}{6}$	0	0	$\frac{100}{3}$

X_2	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	10
S_2	$\frac{7}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	1	0	6
S_3	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	6
Z	0	0	$-\frac{13}{21}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{736}{21}$
X_2	0	1	$\frac{4}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{52}{7}$
X_1	1	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	0	$\frac{24}{7}$
S_2	0	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{5}{7}$	1	$\frac{12}{7}$

محدودیت اول $= x_2 + \frac{4}{7}S_1 - \frac{3}{7}S_2 = \frac{52}{7}$

$$\xrightarrow{\times(-1)} \qquad -\frac{4}{7}S_1 - \frac{4}{7}S_2 + Sg_1 = -\frac{3}{7}$$

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	Sg_1	RHS
Z	0	0	$\frac{13}{21}$	$\frac{2}{7}$	0	0	$\frac{736}{21}$
X_2	0	1	$\frac{4}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	0	$\frac{52}{7}$
X_1	1	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	0	0	$\frac{24}{7}$
S_3	0	0	2/7	$-\frac{5}{7}$	0	0	$\frac{12}{7}$
$\leftarrow Sg_1$	0	0	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{4}{7}$	0	1	$-\frac{3}{7}$
Z	0	0	3	0	0		
X_2	0	1	$-\frac{1}{7}$	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{55}{8}$
X_1	1	0	-1	0	0	1	3
S_3	0	0	1	0	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{63}{25}$
S_2	0	0	1	1	0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{3}{4}$

$x_2 + 1S_1 + \frac{3}{4}Sg_1 = \frac{217}{28}$ یا $\quad 7\frac{3}{4}$

$$-\left[0\,S_1 + \frac{3}{4}Sg_1\right] + Sg_2 = -\frac{3}{4}$$

$$-\frac{3}{4}Sg_1 + Sg_2 = -\frac{3}{4}$$

روش برش اولیه تماماً عدد صحیح:

یکی از ایرادات وارده به روش برش آنست که در هر تکرار یک متغیر و یک محدودیت به مدل اضافه می شود. و این امر منجر به آن خواهد شد که مساله به اندازه ای گسترده شود تا در بعضی مواقع از انجام محاسبات بهر دلیل ممکن امتناع نموده و جواب صحیح بدست نیاوریم. وجود چنین مشکلی استفاده از روش برش اولیه تماماً عدد صحیح را روشی کاراتر و روشی که می تواند از مشکلات روش برش بکاهد معرفی نمود.

از مزایای این روش آنست که ضرورت ندارد ابتدا جواب LP را داشته باشیم و طی قدمهایی که بر می داریم کنترل خواهیم نمود که به اعداد صحیح برسیم ضمناً این روش از سیمپلکس ثانویه استفاده نمی کند. برای استفاده از این روش الگوریتم زیر را بکار می بریم:

قدم اول: شرط عدد صحیح بودن aij ها و bi ها در مدل اولیه را تعیین کنید.

قدم دوم: تابلوی اول سیمپلکس را رسم کنید.

متغیر ورودی به پایه را انتخاب نمایید. سپس با قاعده حداقل نسبتها متغیر خروجی و عنصر لولا را مشخص کنید.

قدم سوم: اگر عنصر لولا مساوی ۱ می باشد یک تکرار با سیمپلکس اولیه پیش بروید و در غیر اینصورت سطر لولا را بیرون از تابلو نوشته aij هر متغیر غیرپایه را تقسیم بر عنصر لولا نمایید. و جزء صحیح آنرا در نظر بگیرید. مجموع نتایج در سمت چپ به همراه متغیر برش که آنرا S'_i می نامند سمت چپ معادله خط برش و جزء صحیح حاصل تقسیم مقدار سمت راست بر عنصر لولا که عدد صحیحی خواهد بود سمت راست معادله خط برش را تشکیل میدهد، تشکیل دهید و آنرا به تابلوی نهایی اضافه کنید و یک تکرار با سیمپلکس اولیه پیش بروید.

این الگوریتم را تا جایی که کلیه متغیرهای صحیح به مقدار عدد صحیح دست یابند ادامه دهید:

$$\begin{aligned} &Max\ Z = x_1 + 4x_2 \\ &S.t \\ &\quad 5x_1 + 7x_2 \le 21 \\ &\quad -x_1 + 3x_2 \le 8 \\ &\quad\quad x_1, x_2 \ge 0, Int \end{aligned}$$

چون عنصر لوله $= 3 \neq 1$است:

	X1	X2	S1	S2	
Z	-1	-4	0	0	0
S1	5	7	1	0	21
←S2	-1	3	0	1	8

$$-1x_1 + 3x_2 + 1S_2 = 8$$

$$\left[-\frac{1}{3}\right]x_1 + \left[\frac{3}{3}\right]x_2\left[\frac{1}{3}\right]S_2 = \left[\frac{8}{3}\right]$$

$$-1x_1 + 1x_2 + 0S_2 + S_1' = 2$$

معادله خط برش اول به تابلو اضافه می شود.

	X1	X2	S1	S2	S_1'	RHS
Z	-1	-4	0	0	0	0
S1	5	7	1	0	0	21
S1	-1	3	0	1	0	8
$\leftarrow S_1'$	-1	1	0	0	1	2
Z	-5	0	0	0	4	8
←S1	12	0	1	0	-7	7
S2	2	0	0	1	-3	2
X2	-1	1	0	0	1	2

$$12x_1 + 0x_2 + 1S_1 - 0S_2 - 7S_1' = 7$$

$$\left[\frac{12}{12}\right]x_1 + \left[\frac{1}{12}\right]S_1 - \left[\frac{7}{12}\right]S_1' = -\left[\frac{7}{12}\right]$$

$$1x_1 + 0S_1 - 1S_1' + S_2' = 0$$

	X1	X2	S1	S_1'	S_2'	RHS
Z	-5	0	0	4	0	8
S1	12	0	0	-7	0	7
S2	2	0	1	-3	0	2
X2	-1	1	0	1	0	2
$\leftarrow S_2'$	1	0	0	-1	1	0
Z	0	0	0	-1	5	8
←S1	0	0	0	5	-12	7
S2	0	0	1	-1	-2	2
X2	0	1	0	0	1	2
X1	1	0	0	-1	1	0

$$1S_1 + 5S_1' + (-12)S_2' = 7$$

$$\left[\frac{1}{5}\right]S_1 + \left[\frac{5}{5}\right]S_1' - \left[\frac{-12}{5}\right]S_2' = \left[\frac{7}{5}\right]$$

$$0S_1 + S_1' - 3S_2' + S_3' = 1$$

	X1	X2	S1	S_2	$\downarrow S_1'$	S_2'	S_3'	RHS
Z	0	0	0	0	-1	5	0	8
S1	0	0	1	0	5	-12	0	7
S2	0	0	0	1	-1	-2	0	2
X2	0	1	0	0	0	1	0	2
X1	1	0	0	0	-1	1	0	0
$\leftarrow S_3'$	0	0	0	0	1	-3	1	1

۱)مساله:

مدل برنامه ریزی خطی مثال فوق را در نظر بگیرید مطلوبست:

الف) آنرا به روش انشعاب و تحدید ترسیمی حل کنید.

ب)آنرا به روش انشعاب و تجدید سیمپلکس (با تغییر متغیر) حل کنید.

ج) با استفاده از روش برش گموری آنرا حل کنید. و محدودیت های برش را رسم نمایید.

	X1	X2	S1	S2	S_1'	S_2'	S_3'	RHS
Z	0	0	0	0	-1	5	0	8
S1	0	0	1	0	5	-12	0	7
S2	0	0	0	1	-1	-2	0	2
X1	0	1	0	0	0	1	0	2
X2	1	0	0	0	-1	1	0	0
$\leftarrow S_3'$	0	0	0	0	1	-3	1	1
Z	0	0	0	0	0	2	1	9
S1	0	0	1	0	0	3	-5	2
S2	0	0	0	1	0	-5	1	3
X2	0	1	0	0	0	1	0	2
X1	1	0	0	0	0	-2	1	1

S_1'	0	0	0	0	1	-3	1	1

$$\begin{cases} Z^* = 9 \\ x_1^* = 1 \\ x_2^* = 2 \end{cases}$$

مدلهای برنامه ریزی صفر-یک

در هنگام حل مسائل تخصیص یکی از روش های حل فرموله کردن مساله با استفاده از برنامه ریزی LP بود. هنگام مدل سازی فرا گرفتیم که بسیاری از مباحث مطروحه در مدیریت نیز می تواند در برنامه ریزی خطی چنین ویژگی را داشته باشد.

این ویژگی که برای اولین بار با آن آشنا شدیم شرح دو حالته بودن متغیرهای تصمیم بود. به این صورت که متغیر تصمیم فقط می توانست یکی از دو حالت را داشته باشد و این دو حالت را با صفر و یک نشان می دادیم. در مدل تخصیص متغیر تصمیم به شکل زیر تعریف می شود:

$$x_{ij} = \begin{cases} \text{٠} \longleftarrow \text{شغل } i \text{ام به فرد } j \text{ام واگذار نشود} \\ \text{١} \longleftarrow \text{شغل } i \text{ام به فرد } j \text{ام واگذار شود} \end{cases}$$

مدلهایی که در آنها متغیرهای صفر و یک وجود داشته باشد بنام مدلهای برنامه ریزی صفر و یک معروفند. در مورد این مدلها ضروری است با دو بخش متفاوت آشنا شویم:

١- چگونه مساله ای را که دارای متغیر صفر و یک است مدله کنیم؟

٢- چگونه یک مساله مدله شده صفر و یک را حل کنیم؟

حل مدلهای صفر و یک

در اینجا به حل مدلهایی که از نوع صفر و یک محض هستند می پردازیم. برای آشنایی با حل مدلهای صحیح و صفر و یک مختلط به کتاب برنامه ریزی عدد صحیح تالیف دکتر محمدجواد اصغرپور (انتشارات دانشگاه تهران) مراجعه شود.

برای حل یک مدل برنامه ریزی عدد صحیح از روش های زیر می توان استفاده نمود:

١- **حل مدل با روش سیمپلکس:** استفاده از این روش به دلیل آنکه محدودیتهای متعددی وجود داد و همچنین مشکلات عدیده ای در حل مدل پدید می آید پیشنهاد نمی گردد. چرا که صرف زمان و منابع زیادی را نیز بهمراه دارد.

۲- **حل مدل با روش شمارش کامل:** در این روش تمام جوابهای ممکن برای مدل نوشته شده و از بین آنها برای مساله جواب شدنی بهینه را انتخاب می کنیم. در روش شمارش کامل اگر n متغیر صفر و یک وجود داشته باشد ضروری است که به تعداد ۲ ^{n} حالت شمارش گردد. لذا اگر ۳ متغیر داشته باشیم ۲ ^{۳}=۸ شمارش و اگر ۴ متغیر داشته باشیم ۲ ^{۴}=۱۶ شمارش خواهیم داشت. ملاحظه می شود با افزایش متغیرها کار شمارش بسیار مشکل می شود. لذا از این روش برای مسائل کوچک استفاده می کنیم.

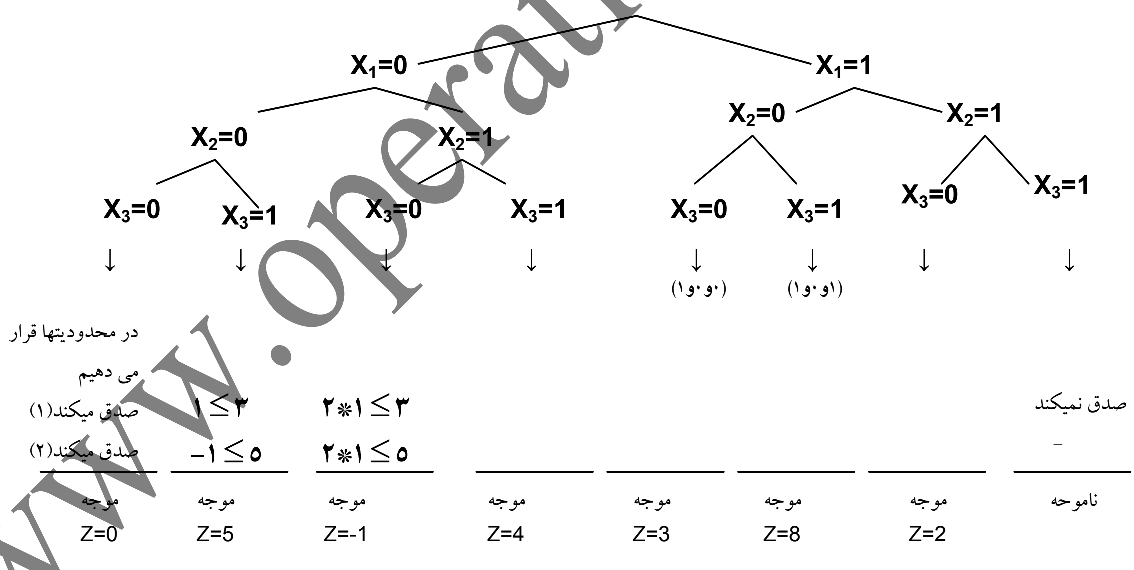
۳- حل مدل با روش شمارش ضمنی:

آقای بالاس (Balas) معتقد است که نیازی به شمارش تمامی حالات وجود ندارد. او با ادامه الگوریتم بالاس فرایند حل مسائل صفر و یک را تسریع نموده و از عملیات زائد کاسته است.

مثال برای روش شمارش کامل:

مدل برنامه ریزی صفر و یک زیر در اختیار شماست:

$$\begin{aligned} &Max\ Z = 3x_1 - x_2 + 5x_3 \\ &S.t \\ &(1) \qquad x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\ &(2) \qquad 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 5 \\ &\qquad\quad x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ یا } 1 \end{aligned} \qquad \begin{cases} Z^* = 8 \\ x_1^* = 1 \\ x_2^* = 0 \\ x_3^* = 1 \end{cases}$$



جواب بهینه

الگوریتم بالاس

آقای بالاس الگوریتمی را طراحی نموده است که مدل برنامه ریزی آن استاندارد خاص خود را دارد:

۱- تابع هدف آن به شکل Max سازی است.

۲- تمامی ضرایب تابع هدف بایستی منفی باشند یا صفر (غیرمثبت باشند)

۳- کلیه محدودیتها به شکل کوچکتر مساوی ($\leq$) باشند.

۴- تمامی متغیرها به شکل صفر و یک باشند یعنی xj=1 یا xj=0

$$Max\ Z = \sum_{i=1}^{n} Cjxj$$

$$S.t$$

$$\sum_{i=1}^{n} aij\ xj \leq bi \qquad (i = 1 \text{ تا } m)$$

$$xj = 0 \text{ یا } 1$$

برای شروع حل مساله با روش شمارش ضمنی ضروری است که مدل شما به شکل استاندارد بالاس باشد. ممکن است در برخی از مسائل مدل استاندارد نباشد به شکل زیراستاندارد بودن را ایجاد می کنیم:

۱- اگر تابع هدف به شکل Minسازی است با ضرب طرفین آن در (۱-) مدل را به شکل Max درآورید.

۲- اگر ضریب متغیر xj به شکل مثبت است، آنرا با متغیر y_j=1-xj جایگزینی نمایید تا منفی شدن Cj تضمین شود. (y_jخود از جنس متغیرهای صفر و یک است)

۳- اگر محدودیتی به شکل $\geq$می باشد طرفین آن را در (۱-) ضرب و مساله را به فرم استاندارد درآورید. (منفی بودن مقادیر سمت راست در فرم استاندارد بالاس مشکلی ایجاد نمی کند.)

۴- اگر محدودیتی به شکل تساوی وجود دارد آنرا به دو محدودیت $\leq$بازنویسی نموده و محدودیت $\geq$را همانند حالت ۳ استاندارد کنید.

بدین ترتیب شما با یک مساله برنامه ریزی صفر و یک استاندارد بالاس روبرو خواهید شد. و می توانید قدم های حل مساله را با الگوریتم بالاس پی بگیرید.

مثال) مدل صفر و یک زیر مفروض است با استفاده از الگوریتم بالاس آنرا استاندارد کنید.

$$MaxZ = 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5$$

$$st.$$

$$1)\quad 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 4x_5 \geq 6$$

$$2)\quad x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0$$

x_1 تا x_5=0 یا 1

$$\begin{cases} x_1 = 1 - y_1 \\ x_3 = 1 - y_3 \\ x_5 = 1 - y_5 \\ x_2 = y_2 \\ x_4 = y_4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &(2) \\ &(3) \end{aligned}\begin{cases} 1 - y_1 - y_2 + 2(1 - y_3) - 4y_4 + 2(1 - y_5) \le 0 \\ 1 - y_1 - y_2 + 2(1 - y_3) - 4y_4 + 2(1 - y_5) \ge 0 \end{cases}$$

$$MaxZ = 2(1 - y_1) - y_2 + 5(1 - y_3) - 3y_4 + 4(1 - y_5)$$
$$= -2y_1 - y_2 - 5y_3 - 3y_4 - 4y_5 + 11$$

$st.$

$$(1) \quad 3(1 - y_1) - 2y_2 + 7(1 - y_3) - 5y_4 + 4(1 - y_5) \ge 6$$
$$\xrightarrow{\times(-1)} (1) \quad 3y_1 + 2y_2 + 7y_3 + 5y_4 + 4y_5 \le 8$$
$$(2) \quad -y_1 - y_2 - 2y_3 - 4y_4 - 2y_5 \le -5$$
$$(3) \quad y_1 + y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 \le 5$$

روش شمارش ضمنی:

الگوریتم شمارش ضمنی (الگوریتم بالاس)

قدم اول:

مساله خود را به شکل استاندارد درآورید.

قدم دوم:

با استفاده از جواب موجه در گره صفر حد پائینی ZL را مشخص کنید. در صورتی که جواب موجه اولیه ندارید و تمام متغیرها آزاد هستند $ZL = -\infty$ در نظر بگیرید:

قدم سوم: $ZL = -\infty$

الگوریتم بالاس همانند روش انشعاب و تحدید است لذا در این قدم با استفاده از ضوابط سه گانه انشعاب یکی از متغیرهای آزاد را برای انشعاب انتخاب کنید.

پیش از پرداختن به ضوابط انشعاب ضروری است با سه مفهوم آشنا شوید.

الف)جواب جزیی: نشان دهنده جوابهای انتخاب شده برای متغیرها می باشد یا بعبارت دیگر به ازای هر متغیری که انشعاب داده ایم یا عدد صفر یا عدد یک انتخاب شده است.

جواب جزیی که آنرا بصورت $p_i(\ldots)$ نمایش می دهیم. جواب هر متغیر را نشان می دهد.

اگر در جایی داشته باشیم (۴و۲-و۳-و۱)p_5 یعنی جواب جزیی گره پنجم را داریم که در آن متغیر x_1 مقدار ۱ و متغیر x_3 و x_2 به دلیل وجود منفی در پشت اندیس آنها مقدار صفر و متغیر x_4 دارای مقدار ۱ است.

$x_1=1$
$x_2=0$
$x_3=0$
$x_4=1$

اندیس متغیر انشعاب یافته

$p_1(1) \quad \rightarrow x_1=1$

مقدار متغیر انشعاب یافته

اندیس متغیر انشعاب یافته

$p_2(-1) \quad \rightarrow x_1=0$

مقدار متغیر انشعاب یافته

مثال: در مساله ۳ متغیر x_3, x_2, x_1 وجود دارد:

انشعاب اول (فرضی) x_1 را انتخاب می کنیم.

انشعاب دوم (فرضی) x_3 را انتخاب می کنیم.

ب) متغیر ثابت: هر متغیری که در جواب جزیی به آن مقدار اختصاص داده شده باشد بنام متغیر ثابت نامیده می شود.

Partial Solution

مثال) مساله دارای ۵ متغیر است: (۵و ۲-و ۱-) pi

x_5, x_2, x_1 متغیرهای ثابت هستند. $\rightarrow$ Fixed variable

ج) متغیر آزاد: متغیرهایی که برای آنها هنوز تصمیم گرفته نشده است بنام متغیرهای آزاد شناخته می شوند. به تعریفی دیگر متغیرهایی که در مجموعه متغیرهای ثابت قرار ندارند مجموعه متغیرهای آزاد را تشکیل می دهند.

در مثال فوق ۵ متغیر داشتیم (x_1-x_2-x_3-x_4-x_5)

Free variabl F (3,4)

اینک می توان با تعاریف فوق متغیر انشعاب را براساس متغیرهای آزاد موجود انتخاب نمود. چگونه؟ بایستی از ضوابط زیر استفاده نموده و متغیری را که برای انشعاب انتخاب می شود را تشخیص دهیم.

ضابطه اول: هر متغیر آزادی که ضرایب آن در تمامی محدودیتها که مقدار متغیر کمکی آنها منفی است، مثبت باشد. برای انشعاب انتخاب نکنیم.

برای اطلاع از اینکه چرا چنین متغیرهایی انتخاب نمی شوند مدل گسترده استانداد بالاس را در نظر بگیرید: در گره صفر هیچ متغیری در جواب جزیی نداریم. بنابراین کلیه متغیرها آزاد هستند. برابر ضابطه (۱) متغیر X_2 انتخاب نمی شود چون قادر به بهبود در ناموجهی مساله نیست، و با انتخاب آن مساله بسمت ناموجهی بیشتر نیز حرکت خواهد نمود.

اما ما بدنبال آن هستیم که با کمترین تکرارها مساله را به جواب موجه برسانیم.

$$Max\ Z = -3x_1 - 5x_2 - 6x_3$$

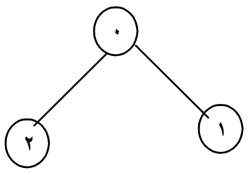
$$st.$$

$$-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + S_1 = -2$$

$$x_1 + 3x_2 - 4x_3 + S_2 = -6$$

$x_1, x_1, x_1 = 0$ یا 1

$ZL = -\infty$



$p_0(\quad)$
$F(1,2,3) \rightarrow$ متغیرهای آزاد
$S(-2,-6) \rightarrow$ متغیرهای‌کمکی
Z=0

متغیر x_2 انتخاب نمی شود: بدلیل زیر:

$$2x_2 + S_1 = -2 \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \rightarrow S_1 = -2 \\ x_2 = 1 \rightarrow S_1 = -4 \end{cases}$$

$$3x_2 + S_2 = -6 \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \rightarrow S_2 = -6 \\ x_2 = 1 \rightarrow S_2 = -9 \end{cases}$$

$\rightarrow$ X_2 قادر به کاستن از ناموجهی نیست

ضابطه دوم: هر متغیر آزادی که توسط ضابطه اول حذف نشده است و در رابطه زیر صدق کند برای انشعاب انتخاب نمی شود:

$$Z + Cj \leq ZL$$

در این رابطه Z نشان دهنده مقدار تابع هدف در جواب جزیی و Cj نشان دهنده مقدار ضریب متغیر j ام در تابع هدف می باشد.

(**نکته مهم:** تا زمانیکه $Z_L = -\infty$ است این ضابطه بکار نمی رود چون بهیچ جواب موجهی نرسیده ایم.)

نکته: این ضابطه بدنبال آنست که شما متغیرهای آزادی را که نمی تواند مقدار Z فعلی را بهبود بخشند. (Z_L بجز منفی بی نهایت) و مقدارشان بدتر از آن می شود را انتخاب نکنیم. تا سریعتر به جواب بهینه برسیم.

ضابطه سوم: برای متغیرهایی که با ضابطه ۱و۲ کنار گذاشته نشده اند متغیری را انتخاب کنید که قدر مطلق مجموع مقادیر منفی متغیرهای کمکی را حداقل کند برای هر متغیر j ام از رابطه زیر این عمل را تضمین نمایند.

ضابطه سوم: $$V_j = \sum_{j=1}^{n} \min \quad (0, S_i - aij)$$

در رابطه فوق $S_i - aij$ میزان بهبود را نشان میدهد که اگر عدد مثبتی باشد در ضابطه ما نمی گنجد و نباید آنرا دخالت دهیم لذا با انتخاب حداقل بین صفر و $S_i - aij$ تضمین می دهیم که هیچگاه عدد مثبت انتخاب نمی شود:

$$\min \quad (0, S_i - aij)$$

با مثال صفحه قبل ادامه می دهیم:

$$\begin{aligned} V_1 &= \min \quad (0, S_1 - a_{11}) + \min(0, S_1 - a_{21}) \\ &= \min \quad (0, (-2 - (-1)) + \min(0, (-6 - 1)) \\ &= \min \quad -1 + \min -7 = -8 \\ V_3 &= \min \quad (0, -2 - (-1)) + \min(0, (-6 - (-4)) = -3 \end{aligned}$$

متغیر x_3 متغیرانشعاب است $\Leftarrow Min\{|V_1 = -8|, |V_3 = -3|\} = 3$

تحقیق نمایید مفهوم Vj چیست و چه عملی را انجام می دهد که می توان براساس حداقل قدرمطلق Vj ها متغیر انشعاب را انتخاب نمود؟

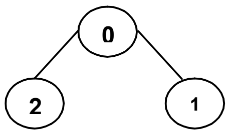
پس از اینکه متغیری برای انشعاب انتخاب گردید در شکل مربوطه نمایش دهید که آیا میتوان به عمق رسید یا خیر؟

قدم چهارم:

اطلاعات مربوطه را برای انشعابتان در هر گره مشخص نمایید (شکل را تکمیل کنید و در هر گره جواب جزیی متغیرهای آزاد مقدار متغیرهای کمکی و مقدار Z را مشخص کنید.)

$x_3 = 0$
$p_1(-3)$
$F(1,2)$
$S(-2,-6)$
$Z = 0$

$P_0(\quad)$
$F(1,2,3)$
$S(-2,-6)$
$Z(0)$



$x_3 = 1$
$p_2(3)$
$F(1,2)$
$S(-1,-2)$
$Z = -6$

قدم پنجم:

پس از اینکه هر جواب جزیی را بدست آوردیم بایستی بررسی کنیم که آیا ادامه از این گره امکان پذیر و یا مطلوب است یا خیر؟

لذا بایستی مشخص شود از آن گره ادامه بدهیم یا اینکه آن گره به عمق رسیده است ضوابط تعینی به عمق رسیدن یک گره عبارتند از: