فصل اول

آمار توصیفی

تعریف علم آمار: به مجموعه روش های علمی که برای جمع آوری اطلاعات اولیه مرتب کردن و خلاصه کردن و طبقه بندی و تجزیه و تحلیل آنها به کار می رود را علم آمار گویند.

جامعه آماری: هر مجموعه ای از اشیاء یا افراد که لااقل دارای یک صفتی مشخص و مشترک باشند را جامعه آماری گویند.

داده های آماری: وقتی افراد جامعه از لحاظ صفت آماری را مورد مطالعه قرار دهیم برای میزان صفت هر فرد عددی به آن نسبت می دهیم. این اعداد را داده های آماری گویند.

متغیر : مشخصه ویژه ای از افراد جامعه را که مورد مطالعه قرار می دهیم متغیر گویند که به انواع زیر است:

انواع متغیرها:

۱- **متغیر کمی:** متغیرهایی اند که قابل اندازه گیری باشند و دارای واحد اندازه گیری اند که خود به دو دسته زیر است:

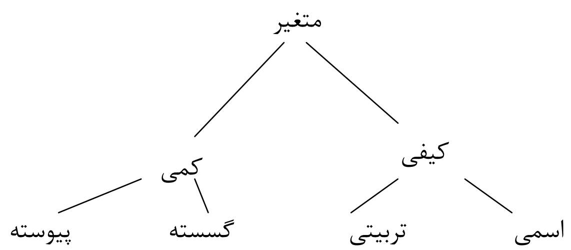
الف) متغیر کمی پیوسته: متغیری است که قابل بیان به صورت عدد اعشاری باشد (در یک بازه) مانند: قد، وزن، طول، حجم و ...

ب) متغیر کمی گسسته: متغیری است که قابل بیان به صورت اعشاری نباشد مانند تعداد فرزندان، جمعیت یک شهر و ...

۲- **متغیر کیفی:** متغیرهایی اند که دارای واحد اندازه گیری نباشند و قابل بیان به صورت عددی نیستند **که خود به دودسته زیر تقسیم می شوند:**

الف) متغیر کیفی ترتیبی: متغیری است که در آن نوعی ترتیب طبیعی باشد مانند مقاطع تحصیلی، مراحل زندگی و ...

ب) متغیر کیفی غیر ترتیبی (اسمی): متغیری است در آن ترتیبی نباشد مانند گروه خون، رنگ چشم، RH خون و ...



آمارگیری: به کلیه روش هایی که برای جمع آوری داده ها انجام می شود آمارگیری گویند که به دونوع زیر است:

الف) سرشماری: هرگاه همه افراد جامعه آماری را مورد مطالعه قرار دهیم به آن سرشماری گویند.

ب) نمونه برداری: هرگاه نتوان همه افراد یک جامعه آماری رامورد مطالعه قرار داد نمونه ای از آن را به قسمی خاص انتخاب می کنیم به آن نمونه برداری یا نمونه گیری گویند.

آمار توصیفی: به قسمتی از علم آمار که درباره خلاصه کردن و توصیف داده ها بحث می کند آمار توصیفی گویند.

آمار استنباطی: به قسمتی از علم آمار که درباره تخمین پارامترهای جامعه از روی پارامترهای نمونه بحث می کند آمار استنباطی گویند.

طبقه بندی داده ها در جدول فراوانی:

داده های آماری را میتوان در جدول فراوانی خلاصه نمود. برای این کار ابتدا داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم و سپس مقادیر زیر را می یابیم.

۱- **دامنه تغییرات :** از تفاضل بزرگترین داده و کوچکترین داده آماری دامنه تغییرات به دست می آید و آن را با R نشان می دهند:

$$R = x_{max} - x_{min}$$

مثال: در داده های ۸ و ۲و ۱۶و ۳و ۱۹و ۱۱و ۱۷ دامنه تغییرات بیابید:

R =۱۹-۲ =۱۷ ⟵ ۱۹و ۱۷و ۱۶و ۱۱و ۸و ۳و ۲

۲- **روش نمایی برای تعداد طبقات:** اگر n تعداد داده ها و k تعداد طبقات باشد، آنگاه k اولین عدد صحیح و مثبتی است که در رابطه $n \leq 2^k$ صدق کند.

مثال: ۲۰ داده آماری را در جدول فراوانی طبقه بندی می کنیم. تعداد طبقات برابر است با:

$$n = 20 \xrightarrow{n\leq 2^k} 20 \leq 2^k \rightarrow k = 5$$

۳- **طول دسته (فاصله طبقات):** از تقسیم دامنه تغییرات بر تعداد طبقات طول دسته به دست می آید و آن را با c نشان می دهیم. $c = \frac{R}{K}$

مثال: در طبقه بندی داده های ۱۹و ۱۴و ۱۸و ۱۱و ۱۷و ۱۶و ۴و ۲۰و ۵ طول هر دسته چقدر است؟

۲۰و ۱۹و ۱۸و ۱۷و ۱۶و ۱۴و ۱۱و ۵و ۴

R= ۲۰ − ۴ = ۱۶ $n = 9 \xrightarrow{n\leq 2^k} 9 \leq 2^k \rightarrow k = 4$ $c = \frac{R}{K} \Rightarrow \frac{16}{4} = 4$

تذکر: هر جدول فراوانی دارای ستونهای زیر است:

۱- **حدود دسته (حدود طبقات):** به اعدادی که در دو طرف یک دسته جدول فراوانی قرار می گیرند حدود دسته می گویند. اولین عدد در دسته اول برابر با کمترین داده (حد پائین) و بقیه اعداد بر طبق طول دسته به دست می آیند.

مثال: داده های زیر را در جدول فراوانی قرار دهید:

۲۰و ۱۱و ۱۸و ۱۳و ۸و ۱۶و ۱۱و ۱۷و ۱۹و ۱۰و ۱۸

حل: ابتدا داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب نموده و *C, K, R* را می یابیم:

۲۰و ۱۹و ۱۸و ۱۸و ۱۷و ۱۶و ۱۳و ۱۱و ۱۱و ۱۰و ۸

R= ۲۰ − ۸ = ۱۲

$$n = 11 \xrightarrow{n \leq 2^k} 11 \leq 2^k \rightarrow k = 4$$

$$c = \frac{R}{K} = \frac{12}{4} = 3$$

چون کمترین داده برابر ۸ می باشد و طول دسته ۳ پس داریم:

حدود دسته	
۸ − ۱۱	
۱۱ − ۱۴	
۱۴ − ۱۷	
۱۷ − ۲۰	

۲- **مرکز دسته (نماینده طبقات):** وسط هر دسته را مرکز آن دسته گویند و یا x_i نشان می دهند.

مثلا در مثال قبل:

حدود دسته	مرکز دسته x_i
۸ – ۱۱	$\frac{8+11}{2} = 9/5$
۱۱ – ۱۴	۱۲/۵
۱۴ – ۱۷	۱۵/۵
۱۷ - ۲۰	۱۸/۵

۳- **فراوانی هر دسته (فراوانی مطلق):** تعداد داده ها در هر دسته را فراوانی آن دسته می گویند و با f_i نشان می دهند. حد پائین در هر دسته متعلق به آن دسته است ولی حد بالا را در طبقه بعد حساب می کنیم. بجز دسته آخر مثلا در مثال قبل

حدود دسته	مرکز دسته x_i	فراوانی f_i	
۸ – ۱۱	۹/۵	۲	(۱۱و۸]
۱۱ – ۱۴	۱۲/۵	۳	(۱۴و ۱۱]
۱۴ – ۱۷	۱۵/۵	۱	(۱۷و ۱۴]
۱۷ - ۲۰	۱۸/۵	۵	[۲۰و ۱۷]

تذکر: در هر جدول فراوانی جمع فراوانی ها با تعداد داده ها برابر است : $\sum_{i=1}^{k} F_i = n$

۴- **فراوانی نسبی:** از تقسیم فراوانی هر دسته بر جمع فراوانی ها فراوانی نسبی به دست می آید و آن را باF_i نشان می دهیم : $F_i = \frac{f_i}{n}$ مثلا در مثال قبل:

فراوانی f_i	فراوانی نسبی F_i
۲	$\frac{2}{11} = 0/181$
۳	$\frac{3}{11} = 0/272$
۱	$\frac{1}{11} = 0/0909$
۵	$\frac{5}{11} = 0/454$

تذکر: همواره جمع فراوانی نسبی برابر ۱ است: $\sum_{i=1}^{k} F_i = 1$

۵- **درصد فراوانی نسبی:** صد برابر فراوانی نسبی را درصد فراوانی نسبی گویند و با p_i نشان می دهند:

$$P_i = F_i \times 100$$

مثلا در مثال قبل :

فراوانی F_i	درصد فراوانی نسبی P_i
۰/۱۸۱	۱۸/۱
۰/۲۷۲	۲۷/۲
۰/۰۹۰۹	۹/۰۹
۰/۴۵۴	۴۵/۴

تذکر : همواره جمع درصد فراوانی نسبی برابر ۱۰۰ است. $\sum_{i=1}^{k} P_i = 100$

۶- **فراوانی تجمعی :** مجموع فراوانی های طبقات بالا و خود طبقه را فراوانی تجمعی گویند و با F_{ci} نشان می دهند. مثلا در مثال قبل:

فراوانی f_i	فراوانی تجمعی
۲	۲
۳	۲+۳=۵
۱	۲+۳+۱=۶
۵	۲+۳+۱+۵=۱۱

تذکر : همواره ردیف آخر فراوانی تجمعی با تعداد داده ها برابر است

۷- **فراوانی نسبی تجمعی:** مجموع فراوانی های نسبی طبقات بالا و خود طبقه فراوانی نسبی را فراوانی نسبی گویند و با F_{cpi} نشان می دهند. مثلا در مثال قبل:

فراوانی نسبی F_i	فراوانی نسبی تجمعی F_{cpi}
۰/۱۸۱	۰/۱۸۱
۰/۲۷۲	۰/۴۵۳
۰/۰۹۰۹	۰/۵۴۴
۰/۴۵۴	۱

تذکر: همواره ردیف آخر فراوانی نسبی تجمعی برابر ۱ می شود.

(ممکن است در اعداد اعشاری به دلیل ننوشتن همه ارقام اعشاری مقداری کمتر از ۱ شود)

۸- **درصد فراوانی نسبی تجمعی:** صد برابر فراوانی نسبی تجمعی را درصد فراوانی نسبی تجمعی گویند و با Q_{ci} نشان می دهند. مثلادر مثال قبل:

F_{cpi} فراوانی نسبی تجمعی	درصد فراوانی نسبی تجمعی Q_{ci}
۰/۱۸۱	۱۸/۱
۰/۴۵۳	۴۵/۳
۰/۵۴۴	۵۴/۴
۱	۱۰۰

تذکر: همواره ردیف آخر درصد فراوانی نسبی تجمعی برابر ۱۰۰ می شود.

مثال: نمرات زیر مربوط به آزمون از ۱۰ دانشجو می باشد. جدول فراوانی این نمرات را نوشته و آن را کامل کنید: ۸و ۱۲و ۱۳و ۱۸و ۲۰و ۱۵و ۱۴و ۸و ۱۱و ۱۲

۲۰و ۱۸و ۱۵و ۱۴و ۱۳و ۱۲و ۱۲و ۱۱و ۸و ۸ $\longrightarrow$ R= ۲۰ − ۸ = ۱۲

$$n = 10 \xrightarrow{n \le 2^k} 10 \le 2^k \rightarrow k = 4 \qquad c = \frac{R}{K} = \frac{12}{4} = 3$$

حدود دسته	x_i مرکز دسته	f_i فراوانی	F_i فراوانی نسبی	P_i درصدفراوانی نسبی	F_{ci} فراوانی تجمعی	F_{cpi} فراوانی نسبی تجمعی	Q_{ci} درصد فراوانی نسبی تجمعی
۸-۱۱	۹/۵	۲	۰/۲	۲۰	۲	۰/۲	۲۰
۱۱-۱۴	۱۲/۵	۴	۰/۴	۴۰	۶	۰/۶	۶۰
۱۴-۱۷	۱۵/۵	۲	۰/۲	۲۰	۸	۰/۸	۸۰
۱۷-۲۰	۱۸/۵	۲	۰/۲	۲۰	۱۰	۱	۱۰۰
جمع	-	۱۰	۱	۱۰۰	-	-	-

تذکر: برای اعداد اعشاری نیز می توان جدول فراوانی تشکیل داد که مطابق فوق می باشد فقط ممکن است طول دسته آن اعشاری شود.

تذکر: ممکن است در یک جدول فراوانی به جای حدود دسته، حدود طبقات داشته باشیم. در این صورت قبل از کامل نمودن جدول، ابتدا ستون حدود واقعی را می نویسیم. برای این کار کافی است از حد پائین ۰/۵ کم و به حد بالا ۰/۵ اضافه کنیم مثلا:

حدود طبقات	حدود واقعی
۸-۱۰	۷/۵-۱۰/۵
۱۱-۱۳	۱۰/۵-۱۳/۵
۱۴-۱۶	۱۳/۵-۱۶/۵
۱۷-۱۹	۱۶/۵-۱۹/۵

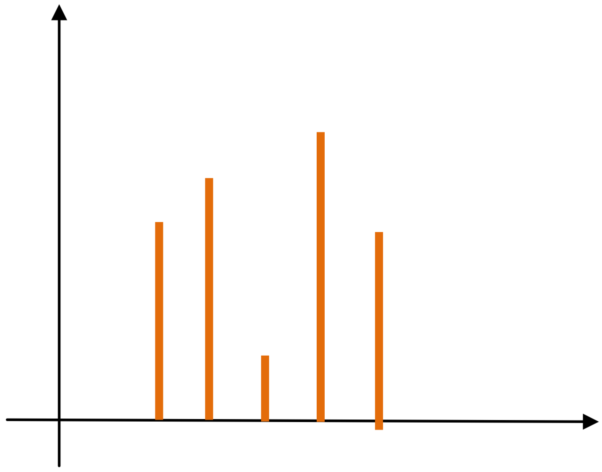
تذکر: طول دسته از حدود واقعی به دست می آید. در مثال بالا C = ۱۰/۵ − ۷/۵ = ۳

نمودارهای آماری (شاخص های هندسی):

علاوه بر جداول آماری، با نمودارهایی می توان اطلاعات نهفته داده ها را مشخص نمود این نمودارها را نمودارهای آماری گویند که عبارتند از:

۱- **نمودار میله ای:** برای متغیرهای گسسته در این نمودار روی محور x ها مراکز دسته قرار گرفته و روی محور y ها فراوانی هر دسته را قرار می دهیم. سپس خطوطی عمودی متناسب با آنها رسم می کنیم.

مثال: نمودار میله ای جدول فراوانی زیر را رسم کنید.

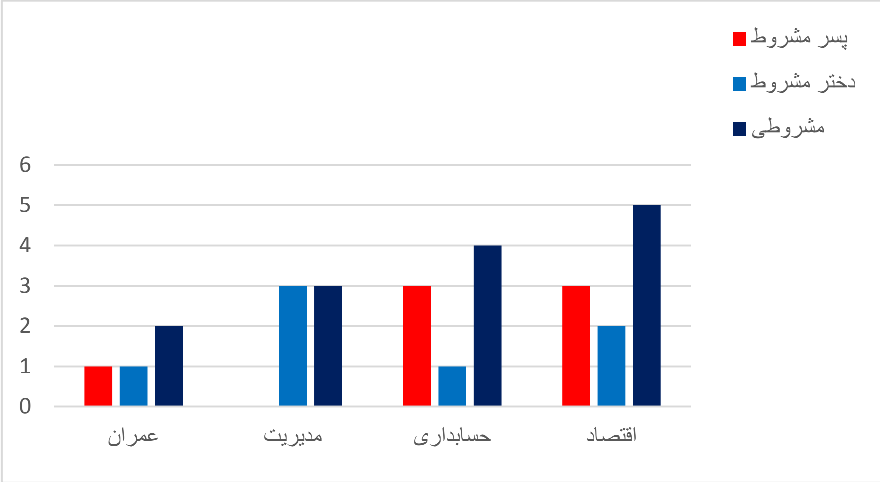


مرکزدسته x_i	فراوانی f_i
۴	۳
۶	۵
۸	۱
۱۰	۷
۱۲	۴

تذکر: نمودار میله ای را می توان به طور همزمان برای چند سری از داده ها نیز رسم نمود.

مثال: نمودار میله ای جدول فراوانی زیرا را رسم کنید.

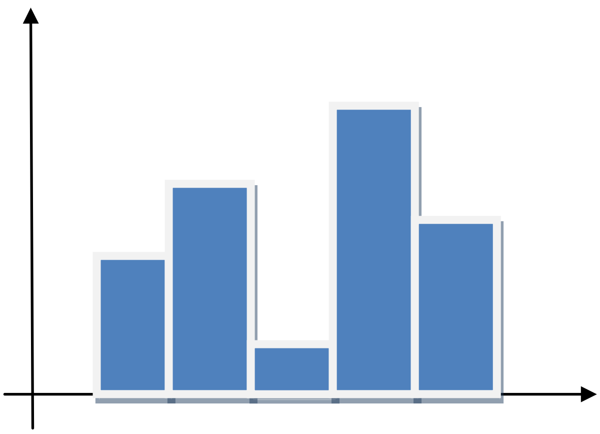
تعداد مشروطی	تعداد دختر مشروط	تعداد پسر مشروط	رشته
۲	۱	۱	عمران
۳	۳	۰	مدیریت
۴	۱	۳	حسابداری
۵	۲	۳	اقتصاد



۲- **نمودار مستطیلی(هیستوگرام):** این نمودار برای متغیرهای پیوسته استفاده می شود. و در این نوع نمودار حدود دسته روی محور x ها و فراوانی را روی محور y ها قرار می دهیم و مستطیل هایی متناسب با فراوانی همان طبقه رسم می کنیم.

مثال: نمودار مستطیلی جدول فراوانی زیر را رسم کنید.

حدود دسته	فراوانی f_i
۳-۵	۳
۵-۷	۵
۷-۹	۱
۹-۱۱	۷
۱۱-۱۳	۴



۳- **نمودار دایره ای:** این نمودار برای متغیرهای گسسته و پیوسته مورد استفاده قرار می گیرد. در این نمودار دایره ای دلخواه رسم نموده و محیط آن را به حسب تعداد فراوانی ها و به حسب زاویه می یابیم:

n	f_i
۳۶۰	α_i

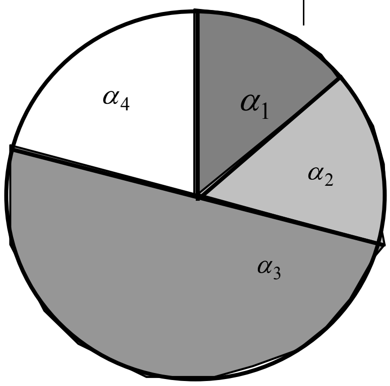
$$\rightarrow \quad \alpha_i^0 = \frac{360\times f_i}{n}$$

مثال: نمودار دایره ای مربوط به جدول فراوانی زیر را رسم کنید.

فراوانی f_i	حدود دسته
۱	۸-۱۱
۲	۱۱-۱۴
۵	۱۴-۱۷
۲	۱۷-۲۰
۱۰	جمع

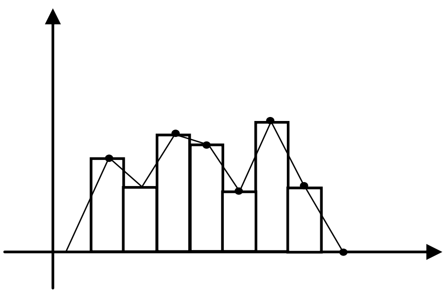
۱	۱۰
α_1	۳۶۰

$\rightarrow \quad \alpha_1 = 36^0$



و به همین ترتیب $\alpha_2 = 72^0$ و $\alpha_3 = 180^0$ و $\alpha_4 = 72^0$

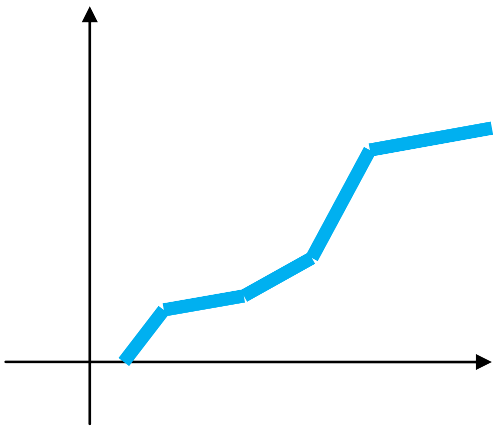
۴- **نمودار چند ضلعی (چند بر فراوانی):** در این نمودار مراکز مستطیل ها را در نمودار مستطیلی پیدا نموده و به هم وصل می کنیم. ابتدا و انتهای این نمودار روی محور x ها قرار دارد. مثلا:



۵- **نمودار فراوانی تجمعی:** در این نمودار حدود دسته را روی محور x ها قرار داده و روی محور yها فراوانی تجمعی را قرار می دهیم و نقاط را به وصل می کنیم.

مثال: نمودار فراوانی تجمعی جدول زیر را رسم کنید.

حدود دسته	فراوانی F_i	فراوانی تجمعی F_{ci}
۳-۶	۳	۳
۶-۹	۱	۴
۹-۱۲	۲	۶
۱۲-۱۵	۴	۱۰
۱۵-۱۸	۱	۱۱



تذکر: نمودار فراوانی تجمعی همواره به صورت صعودی می باشد.

مثال های فصل اول

۱- در طبقه بندی داده های زیر طول دسته را بیابید:

۱۴و ۲۶و ۹و ۲۰و ۱۶و ۱۸و ۱۲و ۱۱و ۱۹و ۶و ۲۲و ۸و ۱۳و ۱۶و ۱۷و ۱۵و ۱۶و ۲۱و ۲۱و ۹و۱۵

۱۵و ۲۰و ۱۴و ۱۷

حل:

R= ۲۶ – ۶ = ۲۰

$$n=25 \xrightarrow{n\leq 2^k} 25\leq 2^k \rightarrow k=5$$

$$c=\frac{R}{K}=\frac{20}{5}=4$$

۲- در جدول داده های زیر اگر درصد فراوانی نسبی دسته وسط برابر ۳۰ باشد فراوانی دسته وسط یعنی مقدار x چقدر است؟

مرکز دسته x_i	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵
فراوانی f_i	۹	۱۵	x	۱۰	۱۸

حل:

$$P_i=F_i\times 100 \Rightarrow 30=\frac{x}{9+15+x+10+18}\times 100 \rightarrow 30=\frac{100x}{42+x}$$

$$\rightarrow 1260+30x=100x \rightarrow 70x=1260 \rightarrow x=18$$

۳- داده های زیر را در یک جدول فراوانی قرار داده و جدول را کامل کنید:

۸۱و ۸۰و ۷۶و ۷۶و ۷۴و ۷۳و ۷۲و ۷۰و ۷۰و ۶۸و ۶۶و ۵۸و ۵۲و ۴۹و ۴۶و ۴۵و ۴۴و ۸۹و ۸۶و ۸۵

حل:

R= ۸۹ − ۴۴ = ۴۵

$$n=20 \xrightarrow{n \le 2^k} 20 \le 2^k \rightarrow k=5$$

$$c=\frac{R}{K}=\frac{45}{5}=9$$

حدود دسته	مرکز دسته x_i	F_i فراوانی	F_i فراوانی نسبی	P_i درصد فراوانی نسبی	F_{ci} فراوانی تجمعی	F_{cpi} فراوانی نسبی تجمعی	درصد فراوانی نسبی تجمعی
۴۴-۵۳	۴۸/۵	۵	۰/۲۵	۲۵	۵	۰/۲۵	۲۵
۵۳-۶۲	۵۷/۵	۱	۰/۰۵	۵	۶	۰/۳	۳۰
۶۲-۷۱	۶۶/۵	۴	۰/۲	۲۰	۱۰	۰/۵	۵۰
۷۱-۸۰	۷۵/۵	۵	۰/۲۵	۲۵	۱۵	۰/۷۵	۷۵
۸۰-۸۹	۸۴/۵	۵	۰/۲۵	۲۵	۲۰	۱	۱۰۰
جمع	–	۲۰	۱	۱۰۰	–	–	–

۴- ساعات و اضافه کاری ۲۰ نفر از کارگران کارخانه ای در هفته در زیر داده شده است.

جدول فراوانی این داده ها را بنویسید و آن را کامل کنید.

۴۷/۵و ۴۷/۵و ۵۲/۵و ۴۸/۲و ۴۸/۷و ۵۱/۸و ۴۶/۵و ۴۷و ۴۹/۵و ۴۹/۸و ۴۴/۹و ۴۵/۲

۴۷/۷و ۴۹/۲و ۴۶/۵و ۵۱و ۴۲/۲و ۵۵/۵و ۴۸/۵و ۴۷/۲و

حل:

R= ۵۵/۵ − ۴۲/۲ = ۱۳/۳

$$n=20 \xrightarrow{n\leq 2^k} 20\leq 2^k \rightarrow k=5$$

$$c=\frac{R}{K}=\frac{13/3}{5}=2/66$$

درصد نسبی تجمعی	فراوانی نسبی تجمعی	فراوانی تجمعی	درصد فراوانی نسبی	فراوانی نسبی	فراوانی	مرکز دسته	حدود دسته
۵	۰/۰۵	۱	۵	۰/۰۵	۱	۴۳/۵۳	۴۲/۲-۴۴/۸۶
۴۵	۰/۴۵	۹	۴۰	۰/۴۰	۸	۴۶/۱۹	۴۴/۸۶-۴۷/۵۲
۸۰	۰/۸	۱۶	۳۵	۰/۳۵	۷	۴۸/۸۵	۴۷/۵۲-۵۰/۱۸
۹۵	۰/۹۵	۱۹	۱۵	۰/۱۵	۳	۵۱/۵۱	۵۰/۱۸-۵۲/۸۴
۱۰۰	۱	۲۰	۵	۰/۰۵	۱	۵۴/۱۷	۵۲/۸۴-۵۵/۵
-	-	-	۱۰۰	۱	۲۰	-	جمع

فصل دوم

شاخص های مرکزی و پراکندگی

الف) شاخص های مرکزی

شاخص هایی اند که مقدار متوسط یک بخش یا حدودی را در یک مجموعه داده ها یا جدول فراوانی مشخص می کنند و عبارتند از:

۱- **میانگین:** در آمار میانگین به چهار قسمت زیر دسته بندی می شود:

الف) میانگین حسابی: مهمترین پارامتر مرکزی میانگین حسابی می باشد که آن را به اختصار میانگین نیز می نامند و آن را با $\bar{x}$ نشان می دهند و برای داده های $x_1, x_2, ..., x_n$ به صورت زیر به دست می آید:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \quad \text{یا} \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

محاسبه میانگین حسابی در جدول فراوانی: اگر x_i مراکز دسته و f_i فراوانی هر دسته باشد آنگاه میانگین حسابی در جدول فراوانی از رابطه $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i$ به دست می آید.

مثال: میانگین حسابی جدول فراوانی زیر را به دست می آورید.

حدود دسته	مرکز دسته x_i	فراوانی f_i
۸-۱۰	۹	۳
۱۰-۱۲	۱۱	۱
۱۲-۱۴	۱۳	۴
۱۴-۱۶	۱۵	۲
جمع	-	۱۰

$$\bar{x} = \frac{9\times 3 + 11\times 1 + 13\times 4 + 1\times 2}{1} = 12$$

ب) میانگین هندسی: متوسط داده هایی که شامل پدیده هایی مانند نرخ رشد، سود، زیان در یک دوره خاص باشند را از میانگین هندسی استفاده می کنیم و آن را با G نشان می دهیم و برای داده های $x_1, x_2, ..., x_n$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$G = \sqrt[k]{x_1, x_2, ... x_k} \quad \text{یا} \quad G = (\prod_{i=1}^{k} x_i)^{1/k}$$

مثال: قیمت کالایی در چهارهفته از یک ماه بر حسب هزارتومان به صورت جدول زیر است. متوسط قیمت این کالا در این ماه چقدر است؟

هفته	اول	دوم	سوم	چهارم
قیمت	۲۰۰	۳۵۰	۳۰۰	۹۰۰

حل: چون متوسط قیمت است پس G را به دست می آوریم:

$$G = \sqrt[4]{200\times 350\times 300\times 900} = 370/78 \quad \text{هزار تومان}$$

تذکر: در صورتی که داده ها تکرار داشته باشند و یا در جدول فراوانی مرتب شده باشند آنگاه

$$G=\sqrt[k]{x_1^{f_1}x_2^{f_2}\ldots x_k^{f_k}}$$

ج) میانگین همساز (توافقی- معکوس- هارمونیک): متوسط داده هایی که وابسته به زمان باشند مانند سرعت، شتاب و ... را با میانگین همساز به دست می آوریم و آن را با H نشان می دهیم که به صورت زیر برای داده های $x_1,x_2,\ldots,x_n$ تعریف می شود:

$$H=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \quad \text{یا} \quad H=\frac{n}{\sum_{i=1}\frac{1}{x_i}}$$

مثال : سرعت یک اتومبیل در ساعت اول حرکت ۴۸ کیلیومتر بر ساعت و در ساعت دوم ۸۰ کیلومتر بر ساعت و در ساعت سوم ۶۰ کیلومتر بر ساعت است. متوسط سرعت این اتومبیل در سه ساعت چقدر است؟

حل: چون داده ها به زمان بستگی دارند پس میانگین همساز می باشد:

$$H=\frac{3}{\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{60}}=61/72\ \ {}^{km}\!/\!_{h}$$

تذکر: در جدول فراوانی با داده های تکراری خواهیم داشت:

$$H=\frac{n}{\sum_{i=1}\frac{f_i}{x_i}}$$

د) میانگین درجه دوم: برای داده های آماری $x_1, x_2, ..., x_n$ میانگین درجه دوم را با Q نشان می دهیم که به صورت زیر تعریف می شود:

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 ... + x_n^2}{n}} \quad \text{یا} \quad Q = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

مثال: میانگین درجه دوم داده های زیر را حساب کنید:

۵ و ۴ و ۲

حل:

$$Q = \sqrt{\frac{2^2 + 4^2 + 5^2}{3}} = \sqrt{15}$$

تذکر: در جدول فراوانی یا داده های تکراری داریم $Q = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2)^{\frac{1}{2}}$

تذکر: بین میانگین های گفته شده رابطه زیر برقرار است:

$$H \le G \le \bar{x} \le Q$$

۲- میانه: دومین شاخص مرکزی میانه است کمیتی است که مرکز داده ها را نشان می دهد و آن را با M_e نشان می دهیم. برای محاسبه میانه در داده های گسسته ابتدا داده ها را مرتب کرده سپس اگر تعداد داده ها فرد باشد آنگاه میانه داده وسط و اگر تعداد داده ها زوج باشد آنگاه میانه برابر میانگین دو داده وسط است.

مثال: میانه داده های زیر را بیابید:

۱) ۱ و۳ و۴ و۵ و۷ و۱۱ و ۱۵ $\quad M_e = 5$

۲) ۲ و۵ و۸ و۱۱ و۱۶ و۱۹ و۲۱ و۲۵ $\quad M_e = \frac{11+16}{2} = 13/5$

محاسبه میانه در جدول فراوانی:

برای محاسبه میانه در جدول فراوانی ابتدا $\frac{n}{2}$ را می یابیم (n تعداد داده ها) سپس اولین طبقه ای که فراوانی تجمعی آن بیشتر یا برابر $\frac{n}{2}$ باشد را پیدا نموده و آن را طبقه میانه دار گوئیم. سپس از رابطه زیر مقدار میانه را می یابیم:

$$M_e = L + \frac{\frac{n}{2} - Fc_{i-1}}{f_i} \times c$$

که در آن

n = تعداد داده ها Fc_{i-1} = فراوانی تجمعی طبقه ما قبل طبقه میانه دار

f_i = فراوانی طبقه میانه دار L = حد پائین طبقه میانه دار

مثال: میانه را در جدول زیر بیابید:

نمرات	نفرات f_i	فراوانی تجمعی Fc_i
۸-۱۰	۱۲	۱۲
۱۰-۱۲	۸	۲۰
۱۲-۱۴	۱۰	۳۰
۱۴-۱۶	۱۱	۴۱
۱۶-۱۸	۵	۴۶
۱۸-۲۰	۷	۵۳
جمع	۵۳	

حل: $n = 53 \rightarrow n/2 = \frac{53}{2} = 26/5$

اولین عددی که در فراوانی تجمعی بیشتر از ۲۶/۵ باشد

۳۰ است پس طبقه سوم طبقه میانه دار می باشد پس:

$$L = 12, \quad Fc_{i=1} = 20, \quad f_i = 10, \quad C = 2$$

$$\Rightarrow M_e = 12 + \frac{26/5 - 20}{10} \times 2 = 13/3$$

۳- **مد (یا نما):** داده ای که بیشترین تکرار را داشته باشد مد یا نما گویند و آن را با M_0 نشان می دهند. ممکن است که یک سری داده مد نداشته باشند یا چندین مد داشته باشند مثلا در داده های ۷و ۶و ۵و ۵و ۴و ۳ مد برابر $M_0 = 5$ می باشد.

محاسبه مد در جدول فراوانی:

برای محاسبه مد در جدول فراوانی ابتدا طبقه ای که بیشترین فراوانی را داشته باشد پیدا نموده و آن را طبقه مد دار می نامیم. سپس از رابطه زیر مقدار مد را می یابیم:

$$M_0 = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times c$$

که در آن

L = حد پائین طبقه مد دار

d_1 = تفاضل فراوانی طبقه مد دار از طبقه قبل مددار

d_2 = تفاضل فراوانی طبقه مددار از طبقه بعد مد دار

مثال: در جدول فراوانی زیر مقدار مد را بیابید:

نمرات	نفرات f_i
۸-۱۰	۱۲
۱۰-۱۲	۸
۱۲-۱۴	۱۰
۱۴-۱۶	۱۱
۱۶-۱۸	۵
۱۸-۲۰	۷

حل: طبقه اول دارای بیشترین فراوانی است

پس طبقه مد دار است:

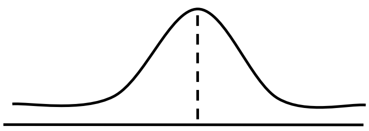
$$L = 8,\quad d_1 = 12 - 0 = 12,\quad d_2 = 12 - 8 = 4,\quad c = 2$$

$$\Rightarrow M_0 = 8 + \frac{12}{12+4} \times 2 = 9/5$$

تذکر: همواره بین سه شاخص مرکزی گفته شده میانگین به تمام داده ها متکی است. یعنی اگر اعداد را تغییر دهیم ممکن است میانه و مد تغییر نکند ولی میانگین حتما تغییر می کند.

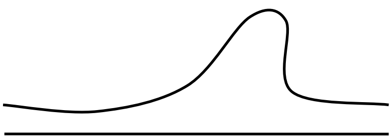
چولگی (کشیدگی): در صورتیکه میانگین و میانه و مد را برای داده ها یا در جدول فراوانی حساب نمودیم سه رابطه زیر بین آنها برقرار است:

الف) اگر $\bar{x} = M_0 = M_e$ باشد آنگاه داده ها را متقارن یا نرمال گویند.

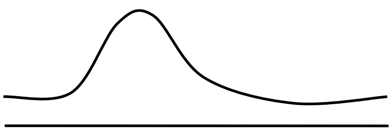


$\bar{x} = M_e = M_0$

ب) اگر $\bar{x} < M_e < M_0$ آنگاه داده ها به چپ چولگی دارند.



ج) اگر $\bar{x} > M_e > M_0$ آنگاه داده ها به راست چولگی دارند.



مثال: چولگی داده ها را در جدول زیر مشخص کنید.

نمرات	نفرات f_i	x_i	Fc_i
۸-۱۰	۱۲	۹	۱۲
۱۰-۱۲	۸	۱۱	۲۰
۱۲-۱۴	۱۰	۱۳	۳۰
۱۴-۱۶	۱۱	۱۵	۴۱
۱۶-۱۸	۵	۱۷	۴۶
۱۸-۲۰	۷	۱۹	۵۳
جمع	۵۳		

حل:

$$\bar{x} = \frac{12\times 9 + 8\times 11 + 10\times 13 + 11\times 15 + 5\times 17 + 7\times 19}{53}$$

$$\rightarrow \bar{x} = 13/38$$

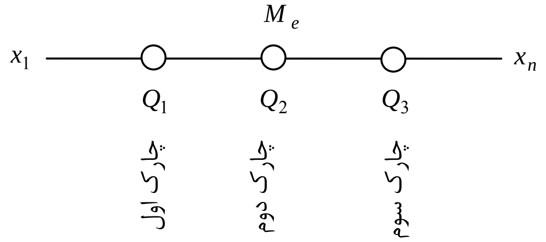
$$M_e = 12 + \frac{26/5 - 20}{10}\times 2 = 13/3$$

$$M_0 = 8 + \frac{12}{12+4}\times 2 = 9/5$$

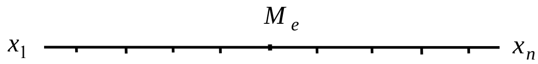
چولگی به راست $\rightarrow M_0 < M_e < \bar{x}$

۴- **چندک ها:** پارامترهایی اند که فراوانی داده ها را به چند قسمت مساوی تقسیم می کنند که به صورت زیر می باشند:

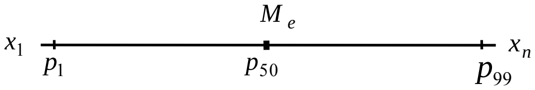
الف) چارک: اگر داده ها را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنیم مراکز تولیدشده هر قسمت را چارک می گویند و با Q نشان می دهند.



ب) دهک: اگر داده ها را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم مراکز تولید شده هر قسمت را دهک گویند و با D نشان می دهند.



ج) صدک: اگر داده ها را به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم مراکز تولید شده هر قسمت را صدک گویند و با p نشان می دهند.



محاسبه چندک ها برای داده های گسسته:

ابتدا داده ها را از کوچک به بزرگ ردیف می کنیم. برای محاسبه چندک A ابتدا (n+1)A را می یابیم. اگر حاصل آن عددی صحیح مانند K شود آنگاه داده K ام یعنی x_k چندک مورد نظر است و اگر حاصل (n+1)A اعشاری شود مثلا k قسمت صحیح و r قسمت اعشاری باشد آنگاه چندک A ام از رابطه زیر به دست می آید:

$$(1-r)x_k + rx_{k+1}$$

مثال: در داده های زیر مطلوبست چارک اول، دهک هفتم، صدک ۳۵ م :

۷۳و ۷۰و ۶۸و ۶۷و ۶۶و ۶۲ و ۶۱و ۶۰و ۵۸و ۵۶و ۵۰و ۴۸و ۴۱و ۴۱و ۴۰و ۳۹و ۳۴و ۳۰و ۲۷و ۲۵

۹۰و ۸۱و ۸۰و ۷۹و ۷۸

حل: تعداد داده ها۲۵ = n

برای Q_1 : $(n+1)A = (25+1)\times\frac{1}{4} = 6/5 = 6+0/5$

$$\rightarrow\ Q_1 = (1-0/5)x_6 + 0/5x_7 = 0/5\times40 + 0/5\times41 = 40/5$$

برای D_7 : $(n+1)A=(25+1)\times\frac{7}{10}=18/2=18+0/2$

$$\rightarrow\quad D_7=(1-0/2)x_{18}+0/2x_{19}=0/8\times68+0/2\times70=68/4$$

برای P_{35} : $(n+1)A=(25+1)\times\frac{35}{100}=9/1=9+0/1$

$$P_{35}=(1-0/1)x_9+0/1x_{10}=0/9\times48+0/1\times50=48/2$$

محاسبه چندک ها در جدول فراوانی:

برای محاسبه چندک ها در جدول فراوانی ابتدا $n\times A$ را می یابیم سپس اولین طبقه ای که فراوانی تجمعی آن بیشتر یا مساوی $n\times A$ باشد را پیدا نموده و آن را طبقه چندک دار می نامیم. سپس از رابطه زیر مقدار چندک را به دست می آوریم.

$$\text{چندک}=L+\frac{n\times A-Fc_{i-1}}{f_i}\times c$$

که در آن L = حد پائین طبقه چندک دار f_i = فراوانی طبقه چندک دار

Fc_{i-1} = فراوانی تجمعی طبقه قبل

مثال: در جدول زیر $P_{42},\ D_8,\ Q_3$ را بیابید:

حدود دسته	فراوانی f_i	فراوانی تجمعی Fc_i
۷/۵-۱۰/۵	۴	۴
۱۰/۵-۱۳/۵	۷	۱۱
۱۳/۵-۱۶/۵	۸	۱۹
۱۶/۵-۱۹/۵	۶	۲۵
جمع	۲۵	

برای Q_3: $n\times A=25\times\frac{3}{4}=18/75$

$$Q_3=13/5+\frac{18/75-11}{8}\times3=16/41$$

D_8 برای : $n \times A = 25 \times \frac{8}{10} = 20$

$$D_8 = 16/5 + \frac{20-19}{6} \times 3 = 17$$

P_{42} برای : $n \times A = 25 \times \frac{42}{100} = 10/5$

$$P_{42} = 10/5 + \frac{10/5 - 4}{7} \times 3 = 13/28$$

تذکر: پارامترهای زیر را نیز برای چندک ها می توان محاسبه نمود:

انحراف چارکی = $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

انحراف دهکی = $D_9 - D_1$

انحراف صدکی = $P_{99} - P_1$

ب) شاخص های پراکندگی:

به معیارهایی که ضمن آگاهی از مقدار متوسط حداقل و حداکثر داده ها را و نحوه پراکندگی داده ها را در جامعه تعیین کند معیار پراکندگی گویند که عبارتست از:

۱-**انحراف متوسط از میانگین (انحراف متوسط):** برای داده های $x_1,...,x_n$ انحراف داده ها از میانگین را با $A.D$ نشان می دهیم که به صورت زیر به دست می آید:

$$A.D=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left|x_i-\bar{x}\right|$$

و در جدول فراوانی $A.D=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}f_i\left|x_i-\bar{x}\right|$

مثال: در داده های ۱۲و ۹و ۸و ۵ انحراف متوسط را بیابید.

حل:

$$\bar{x}=\frac{5+8+9+12}{4}=8/5$$

$$A.D=\frac{|5-8/5|+|8-8/5|+|9-8/5|+|12-8/5|}{4}=2$$

مثال: در جدول زیر انحراف میانگین بیابید:

حدود طبقات	فراوانی	مرکز دسته
۱-۴	۴	۲/۵
۴-۷	۷	۵/۵
۷-۱۰	۳	۸/۵
۱۰-۱۳	۲	۱۱/۵
۱۳-۱۶	۲	۱۴/۵
جمع	۱۸	

حل:

$$\bar{x}=\frac{4\times 2/5+7\times 5/5+3\times 8/5+2\times 11/5+2\times 14/5}{18}=7$$

$$A.D=\frac{4|2/5-7|+7|5/5-7|+3|8/5-7|+2|11/5-7|+2|14/5-7|}{4}$$

$$\rightarrow A.D=3/16$$

۲- **واریانس:** متوسط توان دوم انحراف داده ها از میانگین را واریانس یا پراش گویند و آن را با S^2 نشان می دهند و برای داده های $x_1,\dots,x_n$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2$$

و در جدول فراوانی

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2$$

مثال: واریانس داده های زیر را بیابید: ۹و ۷و ۶و ۵و ۱

حل:

$$\bar{x} = \frac{1+5+6+7+9}{5} = 5/6$$

$$S^2 = \frac{(1-5/6)^2 + (5-5/6)^2 + (6-5/6)^2 + (7-5/6)^2 + (7-5/6)^2 + (9-5/6)^2}{5} = 7/04$$

مثال: در جدول زیر واریانس را بیابید:

مرکز دسته x_i	فراوانی f_i	حدود دسته
۹	۳	۸-۱۰
۱۱	۲	۱۰-۱۲
۱۳	۵	۱۲-۱۴
	۱۰	جمع

حل:

$$\bar{x} = \frac{3\times 9 + 2\times 11 + 5\times 13}{10} = 11/4$$

$$S^2 = \frac{3(9-11/4)^2 + 2(11-11/4)^2 + 5(13-11/4)^2}{10}$$
$$= 3/04$$

۳- **انحراف معیار:** جذر مثبت واریانس را انحراف معیار یا انحراف استاندارد می گویند و با s نشان می دهند. مثلا در مثال قبل: $s = \sqrt{3/04} = 1/74$

۴- **ضریب تغییرات:** برای داده های $x_1,\ldots,x_n$ و یا برای یک جدول فراوانی ضریب تغییرات را با C.V نشان می دهیم که به صورت زیر به دست می آید:

$$C.V = \frac{S}{\overline{X}}$$

مثلا در مثال قبل: $C.V = \frac{1/74}{3/04} = 0/57$

تذکر: ضریب تغییرات واحد اندازه گیری ندارد و برای مقایسه در گروه با دو واحد مختلف از آن استفاده می شود. هر قدر که ضریب تغییرات کمتر باشد پراکندگی کمتر است.

قضیه چبیشف: برای n داده $x_1, x_2,\ldots, x_n$ حداقل درصد مشاهداتی که در فاصله $\bar{x} \pm ks$ قرار گیرند برابر $1-\frac{1}{k^2}$ می باشد که در آن k مثبت و بزرگتر یا مساوی با یک است.

مثال: در آزمونی که از تعدادی کارمند گرفته شده است میانگین نمرات ۷۵ و واریانس ۲۵ به دست آمده است. حداقل ۷۵ درصد نمرات درچه فاصله ای قرار می گیرد؟

حل:

$$1-\frac{1}{k} = 0/75 \to k^2 = 4 \to k = 2 \quad , s^2 = 25 \to s = 5$$

$$\to \bar{x} \pm ks = 75 \pm 2\times 5 = (65,85)$$

تذکر:

1) $\bar{x}_{ax+b} = a\bar{x}+b$

2) $S^2{}_{ax} = a^2 s_x^2$

3) $S^2{}_{x+b} = s_x^2$

4) $S^2{}_{ax+b} = a^2 + s_x^2$

5) $S_{ax+b} = |a| s_x$

متغیر استاندارد شده یا نمره z:برای مقایسه اندازه ها آنها را به صورت نسبی برآورد می کنیم و هر کدام را نسبت به پارامترهای اساسی بیان می کنیم. بهترین روشی که برای تبدیل اندازه های خام به اندازه نسبی وجود دارد آن است که انحراف مقادیر از میانگین را به انحراف معیار مقادیر تقسیم کنیم که آن را با z نشان می دهیم. یعنی:

$$Z = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

اندازه این zها می تواند هر عددی شوند. هر چه z بیشتر باشد داده خام مربوط به آن بهتر است.

مثال: دانش آموزی در درس زبان نمره ۱۲ کسب نمود به طوری که میانگین کلاس ۱۱ و انحراف معیار ۵ باشد. همین دانش آموز در درس ریاضی نمره ۱۵ گرفته به طوری که میانگین کلاس ۱۷ و انحراف معیار ۳ می باشد این دانش آموز در کدام درس قوی تر است؟

حل:

$$x_1 = 12,\quad \bar{x}_1 = 11,\quad S_{1=5} \quad \rightarrow \quad Z_1 = \frac{x_1 - \bar{x}_1}{s_1} = \frac{12-11}{5} = 0/22$$

$$x_2 = 15,\quad \bar{x}_2 = 17,\quad S_2 = 3 \quad \rightarrow \quad Z_2 = \frac{x_2 - \bar{x}_2}{s_2} = \frac{15-17}{3} = -0/66$$

$Z_1 > Z_2$ پس این دانش آموز در درس زبان قوی تر است.

تذکر: متوسط توان r ام انحراف داده ها از میانگین را گشتاور مرتبه r ام گویند و با μ_r نشانی می دهند.

$$\mu_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^r$$

ضریب چولگی: برای اندازه چولگی از ضریب چولگی استفاده می کنیم و آن را با *SK*نشان می دهیم که یکی از روابط زیر به دست می آید:

۱- ضریب چولگی اول پیرسن: $SK = \dfrac{\bar{X} - M_0}{S}$

۲- ضریب چولگی دوم پیرسن: $SK = 3\,\dfrac{(\bar{X} - M_e)}{S}$

۳- ضریب چولگی فیشر: $SK = \dfrac{\mu_3}{S^3}$

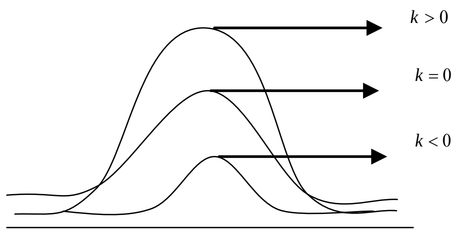
۴- ضریب چولگی چارکی: $SK = \dfrac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1}$

۵- ضریب چولگی صدکی: $SK = \dfrac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}}$

اگر $SK>0$ باشد آنگاه داده ها چولگی به راست دارند واگر $SK<0$ باشد آنگاه داده ها چولگی به چپ دارند و اگر $SK=0$ شود داده ها متقارن یا نرمالند.

ضریب کشیدگی: برا نشان دادن پخی یا کشیدگی داده ها از ضریب کشیدگی استفاده می کنیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$K = \frac{\mu_4}{S^4} - 3$$



تذکر: اگر k>0 باشد آنگاه توزیع ها از توزیع نرمال کشیده ترند و اگر k<0 پخ ترند.

مثال: برای جدول زیر ضریب چولگی و ضریب کشیدگی بیابید:

مرکز دسته x_i	نفرات f_i	نمرات
۹	۵	۸-۱۰
۱۱	۲	۱۰-۱۲
۱۳	۳	۱۲-۱۴
X	۱۰	جمع

$$\bar{x} = \frac{5\times 9 + 2\times 11 + 3\times 13}{10} = 10/6$$

$$\mu_2 = S^2 = \frac{5(9-10/6)^2 + 2(11-10/6)^2 + 3(13-10/6)^2}{10} = 3/04 \qquad \rightarrow \quad S = 1/74$$

$$\mu_3 = \frac{5(9-10/6)^3 + 2(11-10/6)^3 + 3(13-10/6)^3}{10} = 2/112$$

$$\Rightarrow \; SK = \frac{\mu_3}{S^3} = \frac{2/112}{(1/74)^3} = 0/4$$

SK>0 پس چولگی به راست دارند.

$$\mu_4 = \frac{5(9-10/6)^4 + 2(11-10/6)^4 + 3(13-10/6)^4}{10} = 13/234$$

$\Rightarrow \; K = \frac{\mu_4}{S^4} - 3 = \frac{13/234}{(3/04)^2} - 3 = -1/57$. K<0 پس داده ها پخ تر از نرمالند.

مثال های فصل دوم

۱- حقوق کارمندان اداره ای به صورت جدول زیر طبقه بندی شده است. متوسط حقوق این اداره چقدر است؟

حقوق برحسب هزارتومان	تعدادنفرات f_i	مرکز دسته
۲۰۰-۳۰۰	۵	۲۵۰
۳۰۰-۴۰۰	۱۰	۳۵۰
۴۰۰-۵۰۰	۳	۴۵۰
۵۰۰-۶۰۰	۷	۵۵۰
جمع	۲۵	

حل:

$$\bar{x}=\frac{5\times250+10\times350+3\times450+7\times550}{25}=398$$

هزار تومان

۲- شرکتی با سرمایه اولیه ۲۰ میلیون تومان کارایی را شروع نموده است اگ بعد از یک دوره ۳٪ و دوره دوم ٪۸ و دوره سوم ۱۷٪ افزایش سرمایه داشته باشد متوسط رشد سرمایه این شرکت چقدر است؟

حل: $G=\sqrt[3]{0/03\times0/08\times0/17}=0/074$

۳- در سئوال ۲ سرمایه پایان دوره سوم چقدر است؟

حل: سرمایه اولیه $X_1=20$ میلیون تومان

سرمایه بعد از دوره اول $X_2=20+20\times0/03=20/6$ میلیون تومان

سرمایه بعد از دوره دوم $X_3=20/6+20/6\times0/08=22/248$ میلیون تومان

سرمایه بعد از دوره سوم $X_4=22/248+22/248\times0/17=26/03$ میلیون تومان

۴- با مثالی نشان دهید که $H \le G \le \bar{X} \le Q$ می باشد.

حل: ۶و ۵و ۴و ۳و ۲

$$\bar{X} = \frac{2+3+4+5+6}{5} = 4$$

$$H = \frac{5}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}} = \frac{5}{1/44} = 3/47$$

$$Q = \sqrt{\frac{2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{5}} = 4/24$$

$$\Rightarrow \quad H \le G \le \bar{X} \le Q$$

۵- نشان دهید که عبارت $A = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,m})^{1/m}$ به ازای ۲و ۰و ۱- و ۱ = m انواع میانگین ها می باشد.

$$A = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,1})^1 = \bar{X} \quad m=1 \;\rightarrow$$

$$A = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,-1})^{-1} = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i})^{-1} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} = H \quad m=-1 \;\rightarrow$$

$$A = \lim_{m\to 0}(\frac{1}{n}\sum x_i^{\,m})^{1/m} \underset{=}{\underline{Hop}}\; G \quad m=0 \;\rightarrow$$

$$A = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2})^{1/2} = Q \quad m=2 \;\rightarrow$$

۶- میانگین سه عدد 2, x, 2y برابر ۳ و میانگین اعداد 1, 2x, y برابر ۴ می باشد. میانه داده های x, y, 2, 6 را بیابید.

حل:

$$\begin{array}{ll} \frac{2+x+2y}{3} = 3 & 2+x+2y = 9 \\ & \Rightarrow \\ \frac{1+2x+y}{3} = 4 & 1+2x+y = 12 \end{array} \qquad \Rightarrow \; x=5, \quad y=1$$

$$x, y, 2, 6 \rightarrow 5, 1, 2, 6 \rightarrow 1, 2, 5, 6 \rightarrow M_e = \frac{2+5}{2} = 3/5$$

۷- در جدول فراوانی زیر میانه را بیابید.

حدود طبقات	فراوانی f_i	فراوانی تجمعی F_{ci}
۱۰۰-۱۰۹	۳	۳
۱۱۰-۱۱۹	۵	۸
۱۲۰-۱۲۹	۴	۱۲
۱۳۰-۱۳۹	۷	۱۹
۱۴۰-۱۴۹	۶	۲۵
جمع	۲۵	

حل:

طبقه چهارم $\rightarrow 12/5 = \frac{8}{2} \rightarrow 8 = 25$

$L = 129/5$ و $F_{ci-1} = 12, \quad f_i = V, \quad C = 10$

$$\rightarrow M_e = 129/5 + \frac{12/5 - 12}{7} \times 10 = 130/21$$

۸- در سوال قبل مد را بیابید.

حل: طبقه چهارم بیشترین فراوانی را داد پس طبقه مددار است:

$L = 129/5$ و $d_1 = 7 - 4 = 3, \quad d_2 = 7 - 6 = 1, \quad c = 10$

$$M_0 = 129/5 + \frac{3}{3+1} \times 10 = 137$$

۹- چولگی داده ها را در جدول زیر مشخص کنید.

حدود دسته	فراوانی f_i	مرکزدسته x_i	فراوانی تجمعی F_{ci}
۸-۱۱	۲	۹/۵	۲
۱۱-۱۴	۳	۱۲/۵	۵
۱۴-۱۷	۴	۱۵/۵	۹
۱۷-۲۰	۱	۱۸/۵	۱۰
جمع	۱۰	-	-

حل:

$$\bar{x}=\frac{2\times 9/5+3\times 12/5+4\times 15/5+1\times 18/5}{10}=13/7$$

$$n=10\to n/2=5 \quad \frac{\text{طبقه سوم}}{\text{طبقه چهارم}} \quad L=14,\ F_{ci-1}=5,\ f_i=4,\ C=3$$

$$\Rightarrow M_e=14+\frac{5-5}{4}\times 3=14$$

$$L=14,\ d_1=4-3=1,\ d_2=4-1=3$$

طبقه سوم بیشترین فراوانی $M_0=14+\frac{1}{1+3}\times 3=14/75$

پس چولگی به چپ دارد $\bar{x}<M_e<M_0$

۱۰- در داده های زیر P_{89}, D_2, Q_3 را بیابید.

۳و ۲و ۲و ۲و ۲و ۱و ۱و ۱و ۱و ۱و ۱و ۰و ۰

حل: برای Q_3 : $(n+1)A=(13+1)\times\frac{3}{4}=10/5=10+0/5$

$$\rightarrow Q_3 = (1-0/5)x_{10} + 0/5x_{11} = 0/5\times 2 + 0/5\times 2 = 2$$

D_2 برای : $(n+1)A = (13+1)\times \frac{2}{10} = 2/8 = 2 + 0/8$

$$\rightarrow D_2 = (1-0/8)x_2 + 0/8x_3 = 0/2\times 0 + 0/8\times 1 = 0/8$$

P_{89} برای : $(n+1)A = (13+1)\times \frac{89}{100} = 12/46 = 12 + 0/46$

$$\rightarrow P_{89} = (1-0/46)\times x_{12} + 0/46x_{13} = 0/54\times 2 + 0/46\times 3 = 2/46$$

۱۱- جدول زیر میزان حقوق پرسنل یک اداره برحسب هزار تومان می باشد. مطلوبست مقادیر : P_{95}, Q_3, D_1

حقوق	نفرات f_i	فراوانی تجمعی F_{ci}
۳۰۰-۵۰۰	۵	۵
۵۰۰-۷۰۰	۸	۱۳
۷۰۰-۹۰۰	۱۵	۲۸
۹۰۰-۱۱۰۰	۵	۳۳
جمع	۳۳	-

D_1 برای : $n\times A = 33\times \frac{1}{10} = 3/3$

$$D_1 = 300 + \frac{3/3-0}{5}\times 200 = 432$$

Q_3 برای : $nA = 33\times \frac{3}{4} = 24/75$

$$Q_3 = 700 + \frac{24/75-13}{15}\times 200 = 856/6$$

P_{95} برای : $nA = 33\times \frac{95}{100} = 31/35$

$$p_{95} = 900 + \frac{31/35-28}{5}\times 200 = 1034$$

۱۲- نشان دهید که: $M_e = Q_2 = D_5 = P_{50}$

حل:

$$Q_2 = L + \frac{nA - F_{ci-1}}{f_i} \times C = L + \frac{\frac{n}{2} - F_{ci-1}}{f_i} \times = M_e$$

$$D_5 = L + \frac{n \times \frac{5}{10} - F_{ci-1}}{f_i} \times c = M_e$$

$$P_{50} = L + \frac{n \times \frac{50}{100} - F_{ci-1}}{f_i} \times c = M_e$$

۱۳- در جدول زیر مطلوبست انحراف از میانگین، واریانس، ضریب تغییرات،

حدود دسته	فراوانی f_i	مرکز دسته x_i
۲-۴	۳	۳
۴-۶	۱	۵
۶-۸	۴	۷
۸-۱۰	۲	۹
جمع	۱۰	-

حل:

$$\bar{x} = \frac{3\times 3 + 1\times 5 + 4\times 7 + 2\times 9}{10} = 6$$

$$A.D = \frac{3|3-6| + 1|5-6| + 4|7-6| + 2|9-6|}{10} = 2$$

$$S^2 = \frac{3(3-6)^2 + 1(5-6)^2 + 4(7-6)^2 + 2(9-6)^2}{10} = 5$$

$$\rightarrow s = \sqrt{5} = 2/236$$

$$cv = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2/236}{6} = 0/37$$

۱۴- در یک نمونه $\sum x_i = 34$ و $\sum x_i^2 = 314$ شده است. برای $n = 4$ واریانس را بیابید.

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}) = \frac{1}{4}(314 - \frac{(34)^2}{4}) = 6/25$$

۱۵- در مقایسه دو نوع لاستیک برای نوع $A: 2000: \bar{x}$ و $S = 100$ برای $A: 2000: \bar{x}$ نوع $B: 2500: \bar{x}$ و $S = 120$ بدست آمده است. کدام لاستیک کارایی بهتری دارد؟

حل:

$$CV_A = \frac{100}{200} \times 100 = 5\%$$

$$CV_B = \frac{120}{2500} \times 100 = 4/8\%$$

$$CV_B < CV_A$$

پس لاستیک نوع B کاراتر است.

۱۶- در ۸۰داده آماری $S = 2, \bar{X} = 5$ محاسبه شده است. اگر به هر یک از داده های موجود ۱ واحد اضافه شود، درصد ضریب تغییرات جدید را بیابید.

حل:

$$y = x + 1 \to \bar{y} = \bar{x} + 1 = 5 + 1 = 6, s_y = s_x = 2$$

$$\to CV = \frac{2}{6} \times 100 = 33$$

فصل سوم

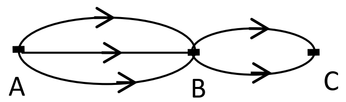
قوانین شمارش واحتمال

قضیه اساسی شمارش (اصل ضرب):

اگر کاری را بهm طریق وکار دیگری را بهn طریق بتوان انجام داد، آنگاه این دو کار را با هم با $m\times n$ طریق می توان انجام داد. واین قضیه را می توان برای تعداد دلخواهی از پیشامدها تعمیم داد.

مثال:برای رفتن از شهر A به شهر B، ۳مسیر و برای رفتن از شهر B به شهر C، ۲مسیر وجود دارد. چند مسیر از شهر A به شهر C وجود دارد؟

مسیر $3\times 2 = 6$



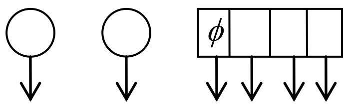
مثال:اتومبیلهایی را به شکل زیر شماره گذاری می کنیم:

((سمت چپ دو حرف لاتین و ادامه عددی ۴ رقمی)). چند اتومبیل به این طریق قابل شماره گذاری است؟

حل: حروف لاتین ازA الیZ برابر ۲۶ حرف و از صفر تا۹ برابر ۱۰ عدد است پس:

عدد چهار رقمی

حروف لاتین



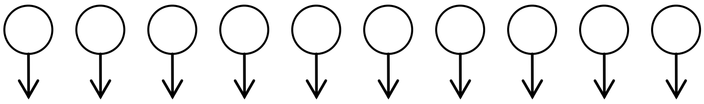
$$26\times26\times9\times10\times10\times10=6084000$$

جایگشت n شی: ترتیبی را که بتوان n شی متمایز را کنار هم قرار داد، جایگشت می گویند و با P_n نشان می دهند که در آن

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\ldots\times 2\times 1$$

مثال: ۱۰کتاب را به ترتیب در قفسه ای قرار می دهیم. تعداد حالتهای ممکن چقدر است؟

حل:



۱۰ × ۹ × ۸ × ۷ × ۶ × ۵ × ۴ × ۳ × ۲ × ۱ = ۱۰ !

$$P_{10} = 10!$$

تبدیل(جایگشت k شی از n شی):هرگاه از n شی متمایز k شی را به ترتیب انتخاب نموده، وکنار هم قرار دهیم به آن تبدیل گویند و آنرا با $P(n,k)$ نشان می دهند که از رابطه زیر بدست می آید:

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال:از بین ۱۰ نفر به ترتیب ۳ نفر را به عنوان رئیس، معاون، حسابدار انتخاب می کنیم به چند طریق این امکان وجود دارد؟

حل:

$$P(10,3) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10\times 9\times 8\times 7!}{7!} = 720$$

تذکر:تعداد تبدیل های مختلف n شی که از انواع مختلف $n_1, n_2, \ldots, n_k$ باشند برابر است با:

$$P_n^{n_1,\ldots,n_k} = \binom{n}{n_1,\ldots,n_x} = \frac{n!}{(n_1!)(n_2!)\ldots(n_k!)}$$

مثال:به چند طریق می توان ۳لامپ قرمز و۲لامپ سبز و ۴لامپ آبی را روی یک صفحه نصب نمود؟

حل:

n = ۳+۲+۴=۹

$$\binom{9}{3,2,4} = \frac{9!}{3!\times 2!\times 4!} = 1260$$

ترکیب k شی از n شی:هر گاه از n شی متمایز، k شی را بدون توجه به ترتیبشان انتخاب کنیم به آن ترکیب می گویند و با $\binom{n}{k}$یا(c(nوk نشان می دهندکه در آن

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{K!(n-k)!}$$

مثال:از یک گروه مرکب از ۵پزشک و ۳پرستار چند کمیته ۳نفره می توان تشکیل داد به طوریکه:

الف)محدودیتی نباشد ب)۲نفر پزشک باشند

حل:

الف) $n = 5+3 = 8, k = 3 \rightarrow \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!}$

$$= \frac{8\times7\times6\times5!}{3\times2\times1\times5!} = 56$$ حالت

ب) $\binom{5}{2}\binom{3}{1} = \frac{5!}{2!(5-2)!} \times \frac{3!}{1!(3-1)1} = 10\times3 = 30$ حالت

ویژگی های ترکیب:

$\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{1} = n$

$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{n}{n-1} = n$ $\binom{n}{n} = 1$

مثال:در جعبه ای ۳مهره سفید و ۲مهره قرمز و ۴مهره آبی یکسان وجود دارد. از این جعبه ۶مهره خارج می کنیم. تعداد حالتهایی بیابید که:

الف)مهره های همرنگ مساوی باشند ب)۴مهره آبی باشد

حل:

الف) $\binom{3}{2}\binom{2}{2}\binom{4}{2} = 3\times2\times6 = 36$ حالت

ب) $\binom{4}{4}\binom{5}{2} = 1\times10 = 10$ حالت

تجربه تصادفی: تجربه ای است که همه نتایج ممکن آن معلوم است ولی نمی توان گفت به طور حتم کدام حالت اتفاق می افتد. مثلا اگر تاسی را پرتاب کنیم بدیهی است که یکی از اعداد ۶و...و۲و۱ ظاهر می شود. ولی نمی توان گفت کدام عدد ظاهر می شود.

فضای نمونه: همه نتایج ممکن یک تجربه تصادفی را فضای نمونه گویند و با s نشان می دهند.

مثال:

۱-فضای نمونه پرتاب یک تاس:

$s = \{1,2,3,4,5,6\} \qquad n(s) = 6$

۲-فضای نمونه پرتاب دو تاس:

$s = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \ldots\ldots, (6,6)\} \qquad n(s) = 36$

۳- فضای نمونه پرتاب یک تاس و یک سکه:

$s = \{(1,\text{ش}), (2,\text{ش}), \ldots, (6,\text{ش}), (1,\text{خ}), (2,\text{خ}), \ldots (6,\text{خ})\} \qquad n(s) = 12$

۴-فضای نمونه ۳فرزند یک خانواده:

s={ (پ پ پ), (د پ پ), (دپ پ), (دپ پ), (دد پ), (د پد)

,(ددپ), (ددد)} $\qquad n(s) = 8$

پیشامد تصادفی:هر زیرمجموعه از فضای نمونه را پیشامد تصادفی گویند.

مثال:دو تاس را با هم پرتاب می کنیم پیشامد آنرا بیابید که تاس اول زوج و تاس دوم بزرگتر از۴آید.

حل:

$$A=\{(2,5),(4,5),(6,5),(2,6),(4,6),(5,6)\} \qquad n(A)=6$$

احتمال:از تقسیم تعداد پیشامد به تعداد فضای نمونه، احتمال آن پیشامد بدست می آید و آنرا با P(A) نشان می دهند

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

مثلا در مثال قبل

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

مثال:خانواده ای ۳فرزند دارد. با چه احتمالی ۲فرزند دختر دارد؟

حل: $n(s)=8 \quad , \quad n(A)=3$ A = {(ددپ), (دپ د), (پ دد)}

$$\rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{8}$$

قوانین احتمال:

1) $0\le P(A)\le 1$

2) $P(\phi)=0$

3) $P(S)=1$

4) $P(A')=1-P(A)$

5) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

6) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

7) $\sum P(A_i)=1$

تذکر:اگر نتوان همه فضای نمونه را نوشت فقط تعداد آنرا با ترکیب بدست می آوریم.

مثال:یک قفسه دارای ۴کتاب رمان و ۳کتاب شعر است. از این قفسه ۳ کتاب به تصادف انتخاب می کنیم. با چه احتمالی ۲کتاب رمان و ۱کتاب شعر است؟

حل:

$$n = 4 + 3 = 7 \quad , \quad k = 3 \;\rightarrow\; n(s) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

$$n(A) = \binom{4}{2}\binom{3}{1} = 6 \times 3 = 18 \;\rightarrow\; P(A) = \frac{18}{35}$$

مثال:احتمال ابتلا به بیماری A برابر ۰/۶ و احتمال ابتلا به بیماری B برابر ۵/ ۰و احتمال ابتلا به هر دوبیماری ۰/۴ می باشد. مطلوبست:

الف)احتمال بیمار شدن ب)احتمال بیمار نشدن ج)احتمال اینکه فردی به بیماری A مبتلا شود و به بیماری B مبتلا نشود

حل:

$$P(A) = 0/6, \quad P(B) = 0/5, \quad P(A \cap B) = 0/4$$

الف) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/6 + 0/5 - 0/4 = 0/7$

ب) $P(A \cap B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0/7 = 0/3$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0/6 - 0/4 = 0/2$$

احتمال شرطی:احتمال رخ دادن پیشامد A به شرط اینکه پیشامدی دیگر مانند B اتفاق افتاده باشد را احتمال شرطی گویند وبا $P(A/B)$ نشان می دهند که در آن

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

مثال:خانواده ای ۳فرزند دارد.اگر کوچکترین فرزند پسر باشد با چه احتمالی این خانواده یک دختر دارد؟

حل:

A:پیشامد تک دختر بودن

B:پیشامد کوچکترین فرزند پسر بودن

S ={(پ پ پ) و ... و(ددد)}　　　　$n(s)=8$

A ={(پ پ د),(پ دپ), (د پ پ)}　　　　$n(A)=3$

B ={(پ پ پ), (پ پ د),(پ دپ),(پ دد)}　$\rightarrow n(B)=4 \rightarrow P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

$A\cap B$ ={(پ پ د),(پ دپ)}　$\rightarrow n(A\cap B)=2 \rightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

$$\rightarrow P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

قوانین احتمال شرطی:

1) $0\le P(A/B)\le 1$ 2)$P(A'/B)=1-P(A/B)$

3)$P(\phi/A)=\phi$ 4)$P(A/A')=P(A'/A)=0$

5)$P(S/A)=1$　　6)$P(A\cap B)=P(A/B)P(B)$

7)$P(S/S)=1$　　　　8)$P(A/A)=1$

9)$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A/A_i)P(A_i)$　　(قانون احتمال کل)

مثال:احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۰/۱۲ و به فرزند دختر ۰/۰۹ می باشد. با چه احتمالی فرزندان این خانواده سالمند؟

حل:

A۱:پسر بودن A۲:دختر بودن A:سالم بودن

قانون احتمال کل = (سالم- دختر) یا (سالم – پسر) = فرزند سالم

$$P(A(= P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2)$$

$$= \frac{1}{2} \times (1 - 0/12) + \frac{1}{2}(1 - 0/09) = 0/895$$

استقلال دو پیشامد تصادفی:دو پیشامد AوB را مستقل گویند هر گاه وقوع یکی در دیگری بی تاثیر باشد. در این صورت داریم: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

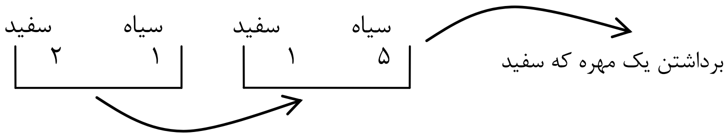
مثال:دو سکه را با هم پرتاب می کنیم. نشان دهید احتمال اینکه هر دو شیر بیایند مستقل است؟

حل: A:سکه اول شیر B:سکه دوم شیر

قانون بیز:اگر $A_1, A_2, ..., A_n$ افرازهایی از فضای نمونه S و A پیشامدی دلخواه باشد، آنگاه:

$$P(A_i / A) = \frac{P(A/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/A_i)P(A_i)}$$

مثال:دو ظرف داریم که در اولی دو مهره سقید و یک مهره سیاه و در دومی یک مهره سفید و پنج مهره سیاه وجود دارد. یک مهره از ظرف اول برداشته و به ظرف دوم انتقال می دهیم و سپس یک مهره از ظرف دوم برمی داریم که سفید است.با چه احتمالی مهره انتقالی سیاه بوده است؟



A۱:پیشامد اینکه مهره انتقالی سیاه باشد

A۲:پیشامد اینکه مهره انتقالی سفید باشد

A:پیشامد اینکه مهره برداشته شده سفید باشد

$$P(A_1)=\frac{1}{3} \quad , \quad P(A_2)=\frac{2}{3} \quad , \quad P(A/A_1)=\frac{1}{7} \quad , \quad P(A/A_2)=\frac{2}{7}$$

$$\rightarrow P(A_1/A)=\frac{P(A/A_1)P(A_1)}{P(A/A_1)P(A_1)+P(A/A_2)P(A_2)}=\frac{\frac{1}{7}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{7}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{7}\times\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}$$

مثالهای فصل سوم

۱-از بین ۴دانشجوی ریاضی و ۵دانشجوی مهندسی و ۳دانشجوی حسابداری، یک جلسه دو نفره تشکیل می دهیم که از یک رشته نباشند. تعداد حالتهای ممکن چقدر است؟

حل: (حسابداری – مهندسی) یا (حسابداری – ریاضی) یا (مهندسی – ریاضی)

حالت ۴۷= ۳ × ۵ + ۳ × ۴ + ۵ × ۴

۲-با ارقام ۵و۴و۳و۲و۱ چند عدد سه رقمی می توان نوشت به طوریکه:

الف)تکرار ارقام مجاز باشد ب) تکرار ارقام مجاز نباشد ج)زوج و غیر تکراری باشد

حل:○○○ ج) ○○○ ب) ○○○ الف)

۴×۳×۲ = ۲۴ ۵×۴×۳ = ۶۰ ۵×۵×۵ = ۱۲۵

۳-هفت نفر به ترتیب در کنفرانسی سخنرانی می کنند. اگر فرد A بلافاصله بعد از فرد B سخنرانی کند به چند طریق این امکان وجود دارد؟

حل:چون فرد A دقیقا بعد از B سخنرانی می کند پس می توان این دو نفر را یک نفر در نظر گرفت یعنی تعداد حالتهای ممکن برابر است با:

$$(7-1)! = 6! = 720$$

۴-اگر در مثال قبل فرد A بعد از فرد B سخنرانی کند به چند طریق امکان پذیر است؟

حل: ۶! + ۵! + ۴! + ۳! + ۲! + ۱!

۵-از یک گروه ۱۰نفره چند صف ۵نفره می توان تشکیل داد؟

حل: P (۱۰ و ۵) = $\frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5!}{5!}$ = ۳۰۲۴۰

۶-به چند طریق می توان ۵ نفر را دور یک میز دایره ای شکل نشاند؟

حل: چون دور دارد پس نفر اول و آخر یکی می تواند باشد. پس تعداد حالتهای ممکن برابر است با:

$$(۵-۱)! = ۴! = ۴\times۳\times۲\times۱ = ۲۴$$

۷-به چند طریق می توان ۵ توپ سفید و ۳ توپ سبز و ۲ توپ قرمز را کنار هم قرار داد؟

حل: $P^{10}_{5و3و2} = \frac{10!}{5!3!2!}$ $n = ۵+۳+۲ = ۱۰$

۸-با حروف کلمه Statistics چند کلمه ۱۰ حرفی می توان نوشت؟

حل:

$s \rightarrow n_1 = 3$

$t \rightarrow n_2 = 3$

$i \rightarrow n_3 = 2$

$a \rightarrow n_4 = 1$

$c \rightarrow n_5 = 1$

$$P^{10}_{3و3و2و1و1} \longrightarrow = \frac{10!}{3!3!2!1!1!}$$

۹- یک مجموعه ۵ عضوی چند زیر مجموعه ۲ عضوی دارد؟

حل:

$$n = ۵ \text{ و } k = ۲ \qquad \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = ۱۰$$

۱۰- جواب معادله $\binom{x}{2} = ۲x$ را بیابید.

حل: $x = 5$ $\qquad \binom{x}{2} \rightarrow \frac{x!}{2!(x-2)!} = 2\,x$

۱۱- از ۱۰ تلویزیون یک فروشگاه ۳ تلویزیون نقص فنی دارد. به چند طریق می توان ۴ تلویزیون خریداری نمود که :

الف) دو تلویزیون نقص فنی داشته باشد

ب) حداقل دو تلویزیون نقص فنی داشته باشد.

حل:

الف) سالم ۱۰-۳ = ۷ $\binom{3}{2}\binom{7}{2}$ = ۲۱ × ۳ = ۶۳

ب) $\binom{3}{2}\binom{7}{2}+\binom{3}{3}\binom{7}{1}$=۲۱ × ۳+ ۷ × ۱ = ۷۰

۱۲- تاسی طوری طراحی شده که احتمال وقوع اعداد فرد در آن ۲ برابر اعداد زوج است. اگر این تاس را یک بار پرتاب کنیم با چه احتمالی مربع کامل ظاهر می شود؟

حل:

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

$x + x + ۲x + x + ۲x + x$=۱⟶۹x=1⟶۱x=$1/_9$

$p(A) = 2x + x = \frac{3}{9}$ {1و4}⟶مربع کامل

۱۳- تاسی طوری اوریب شده که احتمال وقوع هر عدد برابر با عکس آن است. اگر این تاس را پرتاب کنیم با چه احتمالی زوج ظاهر می شود؟

حل:

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

$$x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x+\frac{1}{6}x=1 \quad \rightarrow \quad x=\frac{60}{147}$$

$$P(A)=P\{2\,,4\,,6\}=\frac{1}{2}\times\frac{60}{147}+\frac{1}{4}\times\frac{60}{147}+\frac{1}{6}\times\frac{60}{147}=\frac{55}{147}$$

۱۴- با چه احتمالی در یک گروه ۴ نفره حداقل ۲ نفر در یک ماه متولد شده اند؟

حل: چون هر نفر در یکی از ۱۲ ماه متولد شده پس

$$n(s) = 12 \times 12 \times 12 \times 12 = (12)^4$$

اگر A پیشامد متمایز بودن ماه های تولد باشد آنگاه

$$n(A) = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \qquad \rightarrow \quad P(A) = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{(12)^4} = 0/57$$

و در نتیجه $P(A) = 1 - P(A)' = 1 - \frac{57}{100} = 0/43$

۱۵- کیسه ای شامل ۳ مهره سفید و ۲ مهره قرمز و ۴ مهره سیاه است. مهره ای از این کیسه بیرون آورده و مشاهده شده سفید نیست. با چه احتمالی مهره سیاه است؟

حل:B= پیشامد سیاه بودن A= پیشامد سفید نبودن $p(b) = \frac{4}{9}, p(a) = \frac{6}{9}$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{4/9}{6/9} = 2/3$$

۱۶- در یک جامعه ۶۰٪ افراد بالغ مرد و باسوادند و ۹۰ ٪ افراد باسوادند.

الف) چند درصد باسوادها مرد هستند.

ب) چند درصد باسوادها زن هستند.

حل:

$$\text{(الف} \; p(A \cap B) = \frac{6}{10}, P(B) = \frac{9}{10}$$

$$\rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{(ب} P(A|B) = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

۱۷- احتمال اینکه امروز آفتابی باشد $\frac{2}{10}$ و احتمال اینکه فردا آفتابی باشد $\frac{3}{4}$ می باشد. مطلوبست احتمال اینکه :

الف) هر دو روز آفتابی باشد

ب) هوا آفتابی باشد

ج) آفتابی در کار نباشد.

حل:

$$\text{الف)}\, P(A) = \frac{2}{10}, P(B) = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{2}{10} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{40}$$

$$\text{ب)}\; P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{10} + \frac{3}{4} - \frac{6}{40} = \frac{32}{40}$$

$$\text{ج)}\; P\left(\left(A \cup \acute{B}\right)\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{32}{40} = \frac{8}{40}$$

۱۸- سرایداری ۸ کلید برای باز کردن درب های یک مجتمع دارد. اگر سرایدار ۳ کلید به همراه داشته باشد و ۴۰٪ درب ها باز باشد، با چه احتمالی وی می تواند وارد یک واحد شود؟

حل:

$$P(A) = \frac{3}{8}, P(B) = \frac{4}{10}, P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{4}{10} - \frac{3}{8} \times \frac{4}{10} = 0/625$$

۱۹- اگر پیشامدهای B و A مستقل باشد آنگاه نشان دهید که پیشامدهای 'B و 'A نیز مستقلند.

حل:

$$\text{مستقل} A, B \to P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A\cap B)' = P((A\cup B)' = 1 - P(A\cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A\cap B) - P(A\cap B)$$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = \big(1-P(A)\big)\big(1-P(B)\big) = P(A')P(B')$$

پس 'A',B نیز مستقلند.

۲۰- فردی در جیب خود یک سکه سالم و یک سکه که دو طرف آن شیر است دارد. اگر یک سکه را به تصادف انتخاب و پرتاب کند و شیر ظاهر شود، با چه احتمالی سکه سالم را انتخاب نموده است؟

حل:

A_1 : پیشامد سکه سالم

A_2: پیشامد سکه دو طرف شیر

A_3: پیشامد شیر آورن

$$P(A_1) = \frac{1}{2} \quad , P(A|A_1)P(A_1) = \frac{1}{2} \quad , P(A_2) = \frac{1}{2} \quad , P(A|A_2) = 1$$

$$\to P(A_1|A) = \frac{P(A|A_1)P(A_1)}{P(A|A_1)P(A_1) + P(A|A_2)P(A_2)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 1} = \frac{1}{3}$$

فصل چهارم

متغیرهای تصادفی

متغیر تصادفی: متغیر تصادفی تابعی است از فضای نمونه به اعداد حقیقی و آنرا با X نشان می دهند.

$$X: S \to R$$

در حالت کلی متغیر تصادفی را می توان به دو دسته پیوسته و گسسته طبقه بندی نمود.

الف) متغیر تصادفی گسسته: متغیر تصادفی را گسسته گویند هرگاه برد آن قابل شمارش باشد. برای این متغیر تصادفی نسبت می دهیم که در آن xها مقادیر و Yها احتمال باشند و به آن تابع احتمال (توزیع احتمال گسسته) می گوئیم.

تذکر: همواره مجموع یک تابع احتمال برابر ۱ می باشد. $\sum f(x)$ = ۱

مثال: تاسی را پرتاب می کنیم. اگر متغیر تصادفی Xعدد ظاهر شده باشد آنگاه تابع احتمال را بنویسید.

حل: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$P(X=1)=\frac{1}{6} \qquad P(X=4)=\frac{1}{6}$$

$$P(X=2)=\frac{1}{6} \qquad P(X=5)=\frac{1}{6}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{6} \qquad P(X=6)=\frac{1}{6}$$

X	۱	۲	۳	۴	۵	۶
f(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

مثال: جعبه ای دارای ۳ توپ قرمز و ۲ توپ زرد می باشد. از این جعبه ۲ توپ خارج می کنیم. اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده توپ های قرمز باشد آنگاه تابع احتمال را بنویسید.

حل:

$$n = 3 + 2 = 5, \quad \mathrm{k} = 2 \rightarrow \mathrm{n}(s) = \binom{5}{2} = 10$$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$

X	۰	۱	۲
F(x)	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

ب) متغیر تصادفی پیوسته: یک متغیر تصادفی را پیوسته گویند هرگاه مجموعه برد آن غیر قابل شمارش باشد. برای این متغیر تصادفی نیز تابعی نسبت می دهیم و آنرا تابع احتمال $f(x)$ می نامیم.

برای محاسبه احتمالات این متغیر تصادفی از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

مثال: متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9} & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$ می باشد. مطلوبست

$$p(1 < X < 2)$$

حل:

$$p(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{x^2}{9}\, dx = \frac{7}{28}$$

تابع احتمال توأم: اگر Y و X دو متغیر تصادفی باشند آنگاه احتمال وقوع همزمان این دو متغیر تصادفی را تابع احتمال توأم (توزیع احتمال دو متغیره) می نامیم و با (y و x) f نشان می دهیم.

در تابع احتمال توأم احتمالات گفته را در جدولی نشان می دهیم که در سطر اول آن مقادیر x و در سطر دوم به بعد آن احتمالات و در ستون اول مقادیر y قرار دارد.

X / Y	x_1	x_2	x_n
y_1	$f(x_1, y_1)$	....	$f(x_n, y_1)$
y_2	$f(x_1, y_2)$	....	$f(x_n, y_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	$f(x_1, y_n)$	....	$f(x_n, y_m)$

مثال: جعبه ای حاوی ۳ خودکار آبی و دو خودکار قرمز و ۳ خودکار سبز است. ار این جعبه ۲ خودکار خارج می کنیم. اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده خودکار آبی و متغیر تصادفی Y نشان دهنده خودکار قرمز باشد، آنگاه تابع احتمال توأم را بنویسید.

حل: x = آبی y= قرمز $n = 3 + 2 + 3 = 9 \quad , \quad k = 2$

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{3}{28}$$

$$P(X = 0, Y = 1) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{6}{28}$$

$$P(X = 0, Y = 2) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{28}$$

$$P(X = 1, Y = 0) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{9}{28}$$

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{9}{2}} = \frac{6}{28}$$

$$P(X = 2, Y = 0) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{0}}{\binom{9}{2}} = \frac{3}{28}$$

X \ Y	۰	۱	۲
۰	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$
۱	$\frac{6}{28}$	$\frac{6}{28}$	۰
۲	$\frac{1}{28}$	۰	۰

تذکر: احتمالات توأم مربوط به متغیرهای پیوسته را با انتگرال دوگانه تعریف می کنیم:

$$P(a < x < b, c < y < d) = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

مثال:متغیرهای‌تصادفی Y وXدارای‌تابع احتمال توأم

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{96} & 0 < x < 4, 1 < y < 5 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

می باشد. مطلوبست $P(1 < x < 2, 2 < y < 3)$

حل:

$$P(1 < x < 2, 2 < y < 5) = \int_1^2 \int_2^3 \frac{xy}{96} dydx = \frac{5}{128}$$

توابع حاشیه ای (کناری) : اگر X وY دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم $f(x,y)$ باشند، آنگاه توزیع احتمال هر یک از متغیرها به تنهایی را توابع حاشیه ای گویند و با $g(x)$ و $h(y)$ نشان می دهند.

$$g(x) = \begin{cases} \sum_y f(x,y) & x,y \text{ گسسته} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy & x,y \text{ پیوسته} \end{cases}$$

$$h(y) = \begin{cases} \sum_x f(x,y) & x,y \text{ گسسته} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx & x,y \text{ پیوسته} \end{cases}$$

مثال: توابع حاشیه ای تابعاحتمالتوأم زیر را بنویسید.

حل:

Y \ X	۱	۲	h(y)
۱	۰/۱	۰/۱۵	**۰/۲۵**
۲	۰/۲	۰/۳	**۰/۵**
۳	۰/۱	۰/۱۵	**۰/۲۵**
g(x)	**۰/۴**	**۰/۶**	۱

$$h(1) = 0.1 + 0.15 = 0.25$$
$$h(2) = 0.2 + 0.3 = 0.5$$
$$h(3) = 0.1 + 0.15 = 0.25$$
$$g(1) = 0.1 + 0.2 + 0.1 = 0.4$$
$$g(2) = 0.15 + 0.3 + 0.15 = 0.6$$

مثال: توابع حاشیه ای تابع احتمال توأم $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{96} & 0<x<4\ ,\ 1<y<5\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$ را بنویسید.

حل:

$$g(x)=\int f(x,y)dy=\int_{1}^{5}\frac{xy}{96}dy=\frac{x}{8}$$

$$h(y)=\int f(x,y)dx=\int_{0}^{4}\frac{xy}{96}dx=\frac{y}{12}$$

متغیرهای تصادفی مستقل: دو متغیر تصادفی را مستقل گویند هرگاه به ازای هر x و y داشته باشیم: $f(x,y)=g(x)h(Y)$

مثلا در مثال قبل:

$$g(x)h(y)=\begin{cases}\frac{x}{8} & 0<x<4\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}\begin{cases}\frac{y}{12} & 0<y<5\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}=\begin{cases}\frac{xy}{96} & 0<x<4,1<y<5\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}=f(x,y)$$

پس X,Y مستقلند

مثال: آیا دو متغیر تصادفی x و y با تابع احتمال توأم زیر مستقلند:

حل:

X \ Y	۱	۲	h(y)
۱	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲۵
۲	۰/۲	۰/۳	۰/۵
۳	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲۵
g(x)	۰/۴	۰/۶	۱

$$h(1) = 0.1 + 0.15 = 0.25$$
$$h(2) = 0.2 + 0.3 = 0.5$$
$$h(3) = 0.1 + 0.15 = 0.25$$
$$g(1) = 0.1 + 0.2 + 0.1 = 0.4$$
$$g(2) = 0.15 + 0.3 + 0.15 = 0.6$$

$$g(1)h(1) = 0/4 \times 0/5 = 1 = f(1,1)$$

$$g(1)h(2) = 0/4 \times 0/5 = 0/2 = f(1,2)$$

$$g(1)h(3) = 0/4 \times 0/25 = 0/1 = f(1,3)$$

$$g(2)h(1) = 0/6 \times 0/25 = 0/15 = f(2,1)$$

$$g(2)h(2) = 0/6 \times 0/5 = 0/3 = f(2,2)$$

$$g(2)h(3) = 0/6 \times 0/25 = 0/15 = f(2,3)$$

$$= g(x)h(y) = f(x,y)$$

پس x,y مستقلند

امید ریاضی: برای متغیر تصادفی X میانگین را با $E(X)$ یا μ_x نشان می دهیم که از رابطه زیر بدست می آید:

$$E(x) = \begin{cases} \sum \quad xf(x) & \text{گسسته } x \\ \int \quad xf(x)dx & \text{پیوسته } x \end{cases}$$

مثال: در تابع احتمال زیر مطلوبست $E(X)$:

X	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

حل : $E(X) = \sum xf(x) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{12}{8}$

مثال: در تابع احتمال $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} & x > 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$ میانگین x را بیابید.

حل: $E(X) = \int_0^\infty x \left(\frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}}\right) dx = 100$

تذکر: امید ریاضی تابعی مانند $h(x)$ نیز مانند فوق بدست می آید:

$$E(h(x)) = \begin{cases} \sum \quad h(x)f(x) & \text{گسسته } x \\ \int \quad h(x)f(x)dx & \text{پیوسته } x \end{cases}$$

مثال: در تابع احتمال

X	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

مطلوبست $E(۲x^2 - ۵)$ و $E(X)$

حل: $E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6}$

$$E(2x^2-5)=(2(1)^2-5)\frac{1}{6}+(2(2)^2-5)\frac{1}{6}+(2(3)^2-5)\frac{1}{6}+(2(4)^2-5)\frac{1}{6}$$

$$+(2(5)^2-5)\frac{1}{6}+(2(6)^2-5)\frac{1}{6}=\frac{76}{3}$$

مثال: متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $f(x)=\begin{cases}2-2x & 0<x<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$ است. مطلوبست

$E(X^2)$ و $E(3X^2+4X)$

حل:

$$E(x^2)=\int_0^1 x^2(2-2x)dx=\frac{1}{6}$$

$$E(3x^2+4x)=\int_0^1(3x^2+4x)(2-2x)dx=\frac{11}{6}$$

واریانس متغیر تصادفی:برای یک متغیر تصادفی X واریانس را با σ_x^2 یا $Var(X)$نشان می دهیم که از رابطه زیر بدست می آید:

$$\operatorname{var}(x)=E\left[\left(x-E(x)^2\right)\right]=E(x^2)-(E(x))^2$$

مثال: متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال

x	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

است. مطلوبست واریانس این متغیر تصادفی:

حل:

$$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

$$E(x^2)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{30}{8}+3^2\times\frac{1}{8}=\frac{24}{8}=3$$

$$\rightarrow \operatorname{var}(x)=E(x^2)-(E(x))^2=3-(\frac{3}{2})^2=\frac{3}{4}$$

مثال: متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال $f(x)=\begin{cases}2-2x & 0<x<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$ است. مطلوبست

میانگین و واریانسx

حل:

$$E(x)=\int_0^1 x(2-2x)dx=\frac{1}{3}\ ,\qquad E(x^2)=\int_0^1 x^2(2-2x)dx=\frac{1}{6}$$

$$\text{Var(x)}=E(X^2)-E(X)^2=\frac{1}{6}-(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{18}$$

امید ریاضی توام دو متغیر تصادفی: اگر x , y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توام f(x,y) باشند آنگاه امید ریاضی تابعی از x,y مانند h(x,y) را ب صورت زیر تعریف می کنیم:

$$E\big(h(x,y)\big)=\begin{cases}\sum\sum h(x,y)f(x,y) & \text{گسسته } x,y\\ \iint h(x,y)f(x,y)dxdy & \text{پیوسته } x,y\end{cases}$$

مثال: اگر x,y دارای تابع احتمال توام زیر باشند مطلوبست $E(XY^2)$

حل:

Y \ X	۲	۴
۲	۰/۱	۰/۱۵
۳	۰/۲	۰/۳
۵	۰/۱	۰/۱۵

$$E(XY^2) = 2(2)^2 \times 0/1 + 2(3)^2 \times 0/2 + 2(5)^2 \times 0/1$$

$$+4(2)^2 \times 0/15 + 4(3)^2 \times 0.3 + 4(5)^2 \times 0/15 = 35/2$$

مثال: در تابع احتمال توام $f(x,y) = \begin{cases} \frac{16y}{x^3} & x > 2, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$ مطلوبست E(xy)

حل: $E(XY) = \int_2^\infty \int_0^1 x\left(\frac{16y}{x^3}\right) dydx = \frac{8}{3}$

تذکر: امید ریاضی x,y در توابع دو متغیره از رابطه زیر به دست می آید.

$$E(x) = \begin{cases} \sum\sum xf(x,y) & \text{x, y گسسته} \\ \int\int xf(x,y)dxdy & \text{x, y پیوسته} \end{cases}$$

$$E(y) = \begin{cases} \sum\sum xf(x,y) & \text{x, y گسسته} \\ \int\int yf(x,y)dxdy & \text{x, y پیوسته} \end{cases}$$

تذکر: اگر دو متغیر x,y مستقل باشند آنگاه $E(xy) = E(x)E(y)$ ولی عکس آن صحیح نیست.

کوواریانس (همپراش): برای بررسی چگونگی همبستگی بین دو متغیر تصادفی از کوواریانس استفاده می کنیم و آن را با $cov(x,y),\ \sigma_{xy}$ نشان می دهیم که از رابطه زیر به دست می آید.

$$\sigma_{xy} = E(xy) - E(x)E(y)$$

مثال: کوواریانس x,y با تابع احتمال توام زیر را بیابید:

حل:

Y \ X	-۲	-۱	۱	۲
۱	۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	۰
۴	$\frac{1}{4}$	۰	۰	$\frac{1}{4}$

$$E(X) = \sum xf(x,y) = -2 \times \frac{1}{4} + (-1) \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = 0$$

$$E(Y) = \sum yf(x,y) = 1 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = 2/5$$

$$E(XY) = \sum xyf(x,y) = -2 \times 1 \times 0 + (-2) \times 4 \times \frac{1}{4} + \cdots = 0$$

$$cov(X,Y) = 0 - 0 \times 2/5 = 0$$

مثال: کوواریانس متغیرهای تصادفی X,Y با تابع احتمال توام زیر را به دست آورید.

$$\mathrm{f(x,y)} = \begin{cases} 2 & 0 < x < y \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

حل:

$$E(X) = \int_0^2 \int_0^y 2xdxdy = \frac{1}{3} \qquad E(Y) = \int_0^2 \int_0^y 2ydxdy = \frac{2}{3}$$

$$E(XY) = \int_0^2 \int_0^y 2xydxdy = \frac{1}{4}$$

$$\sigma_{xy} = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{36}$$

ضریب همبستگی: اگر x,y دو متغیر تصادفی باشند آنگاه ضریب همبستگی این دو متغیر تصادفی را $\rho(X,Y)$ با نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\rho(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_X \sigma_y}$$

مثال: ضریب همبستگی متغیرهای تصادفی x,y با تابع احتمال توام زیر را بیابید:

X \ Y	-۲	۲
۱	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$
2	$\frac{5}{18}$	$\frac{6}{18}$

حل:

$$E(x)=\sum xf(x,y)=\frac{14}{9},\qquad E(x^2)=\sum x^2f(x,y)=\frac{48}{18}$$

$$\rightarrow \sigma_x^2=E(x^2)-E(X)^2=\frac{20}{81}$$

$$E(y)=\sum yf(x,y)=\frac{29}{18},\qquad E(y^2)=\sum y^2f(x,y)=\frac{51}{18}$$

$$\rightarrow \sigma_y^2=E(Y^2)-E(Y)^2=\frac{77}{324}$$

$$E(xy)=\sum xyf(x,y)=\frac{45}{18}$$

$$\rightarrow cov\ (x,y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{45}{18}-\frac{14}{9}\times\frac{29}{18}=-\frac{1}{162}$$

$$\rightarrow \rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{-\frac{1}{162}}{\sqrt{\frac{20}{81}\times\frac{77}{324}}}=-0/025$$

قضیه چبیشف: اگر x یک متغیر تصادفی با واریانس معلوم باشد آنگاه:

$$1)P(|x-\mu|\geq K\sigma)\leq\frac{1}{k^2}\qquad\qquad 2)\ \mathrm{P}(|x-\mu|\leq k\sigma)\geq 1-\frac{1}{k^2}$$

مثال: متغیر تصادفی X دارای میانگین ۲۵ و واریانس ۱۶ می باشد. مطلوبست :

الف) $P(17<X<33)$ ب) $\mathrm{P}(|x-25|\geq 12)$

الف) $\mathrm{P}(17<X<33)=(\mathrm{P}(|x-25|<8)\geq 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

ب) $\mathrm{P}(|x-25|\geq 12)=(\mathrm{P}(|x-25|\geq 3\times 4)<\frac{1}{9}$

مثال های فصل چهارم

۱- سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم اگر متغیر تضصادفی x نشان دهنده تعداد شیرها باشد آنگاه تابع احتمال را بنویسید.

حل:

{(خ خ خ)، (خ خ ش)، (خ ش خ)،(ش خ خ)، (خ ش ش)، (ش خ ش)، (ش ش خ)، (ش ش ش)}= S

$$P(X=0)=\frac{1}{8}$$

$$P(X-1)=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2)=\frac{3}{8}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{8}$$

X	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

۲- اگر متغیر تصادفی x دارای توزیع احتمالی به صورت زیر باشد آنگاه مقدار a را بیابید.

$$f(x)=a(\frac{1}{3})^x \quad ,x=0,1,2,...$$

حل:

$$\sum f(x)=1 \rightarrow \sum a(\frac{1}{3})^x=1 \rightarrow a\sum(\frac{1}{3})^x=1$$

$$\rightarrow a(1+\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+...)=1 \rightarrow a\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=1 \rightarrow a=\frac{2}{3}$$

۳- متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال $\mathrm{f}(x) = \begin{cases} ax^2 & 1 < x \leq 2 \\ ax & 2 < x < 3 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$ می باشد.

مطلوبست:

الف) مقدار a ب) $P(X > 2)$ ج) $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2})$

حل:

الف) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \rightarrow \int_{1}^{2} ax^2 sx + \int_{2}^{3} axdx = 1 \rightarrow a = \frac{6}{29}$

ب) $P(X > 2) = \int_{2}^{3} axdx = \int_{2}^{3} \frac{6}{29} xdx = \frac{15}{29}$

ج) $P(\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{6}{29} x^2 dx = \frac{19}{116}$

۴- از ظرفی که شامل ۳ توپ سیاه و ۲ توپ سفید و ۴ توپ آبی است، یک نمونه ۲ تایی و بدون جایگذاری انتخاب می کنیم. اگر متغیر تصادفی X توپهای سیاه و متغیر تصادفی Y توپهای سفی باشند آنگاه تابع احتمالی توام را به دست آورده و $P(X + Y \leq 1)$ را محاسبه کنید.

حل:

X: سیاه   Y: سفید

$$n = 3 + 2 + 4 = 9, K = 2$$

X \ Y	۰	۱	۲
0	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{3}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	۰
۲	$\frac{1}{36}$	۰	۰

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{6}{36}$$

$$P(X = 0, Y = 1) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{8}{36}$$

$$P(X = 0, Y = 2) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{4}{0}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{36}$$

$$P(X = 1, Y = 0) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{12}{36}$$

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{0}}{\binom{9}{2}} = \frac{6}{36}$$

$$P(X = 2, Y = 0) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{4}{0}}{\binom{9}{2}} = \frac{3}{36} \quad P(X + Y \le 1) = \frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{12}{36} = \frac{26}{36}$$

۵- متغیر های تصادفی X,Y دارای تابع احتمال توام

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$ می باشد.

مطلوبست $P(X+Y<\frac{1}{2})$

حل:

$$P(X+Y<\frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}-y} dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} x\int_0^{\frac{1}{2}-y} dy = \int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}-y)dy = (\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}y^2)\int_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

۶- مستقل بودن متغیرهای تصادفی X,Y با تابع احتمال توام زیر را بررسی کنید.

حل:

Y \ X	1	2	3	h(y)
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{9}$	.	$\frac{14}{45}$
3	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{79}{180}$
g(x)	$\frac{1}{3}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{5}{36}$	

$$g(1)h() = \frac{1}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$f(1,1) = 0$$

$$\Rightarrow g(1)h(1) \neq f(1,1)$$

پس مستقل نیستند.

۷- متغیر تصادفی x نشان دهنده تعداد پزشکان در گروه های سه نفره است که از بین ۴ پزشک و ۳پرستار انتخاب می شوند. مطلوبست میانگین و واریانس x

حل: $n=4+3=7,\ x=3x$ = پزشک

x	0	1	2	3
F(x)	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

$$P(x=0)=\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{1}{36}$$

$$P(x=1)=\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{12}{35}$$

$$P(x=2)=\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}}=\frac{18}{35}$$

$$P(x=3)=\frac{\binom{4}{3}\binom{3}{0}}{\binom{7}{3}}=\frac{4}{35}$$

$$E(x)=0\times\frac{1}{35}+1\times\frac{12}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{4}{35}=\frac{12}{7}$$

$$E(x^2)=0^2\times\frac{1}{35}+1^2\times\frac{12}{35}+2^2\times\frac{18}{35}+3^2\times\frac{4}{35}=\frac{24}{7}$$

$$\operatorname{var}(x)=\frac{24}{7}-(\frac{12}{7})^2=\frac{24}{49}$$

۸- اگر X,Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمالی توام زیر باشند مطلوبست E(y), E(x)

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & 0<x<y \quad 0<y<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

حل:

$$E(y)=\int_0^1\int_0^y 2ydxdy=\frac{2}{3}\quad E(X)=\int_0^1\int_0^y 2xdxdy=\frac{1}{3}$$

۹- نشان دهید که اگر متغیرهای تصادفی X,Y مستقل باشند آنگاه cov(x,y)=0

حل: چون x,y مستقلند پس E(xy)=E(x)E(y) یعنی:

$$E(xy)-E(x)E(y)=0 \rightarrow cor(x,y)=0$$

۱۰-ضریب همبستگی جدول زیر را بیابید:

Y \ X	۰	۱	2
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	0

حل:

$$E(x)=\frac{1}{4},y)=\frac{8}{10},E(x,y)=\frac{2}{10}$$

$$\rightarrow \sigma_{xy}=\frac{2}{10}-\frac{4}{10}\times\frac{8}{10}=\frac{-12}{100}$$

$$E(x^2)=\frac{4}{10},E(y^2)=\frac{10}{10}=1 \rightarrow \sigma_x^2=\frac{24}{100},\sigma_y^2=\frac{36}{100}$$

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=-\frac{1}{\sqrt{6}}$$

فصل پنجم

توزیع های احتمال خاص

الف) توزیع های گسسته:

۱- **توزیع برنولی:** آزمایشی را در نظر می گیریم که دارای ۲ پیشامد باشد و می توان به آنها پیروزی و شکست نسبت داد. اگر P احتمال پیروزی باشد آنگاه q=1-p احتمال شکست است. اگر متغیر تصادفی x تعداد موفقیت ها باشد آنگاه این آزمایش را برنولی گویند که تابع احتمال آن به صورت زیر است:

x	۰	۱
F(x)	$1-p$	p

فرمول مربوط به توزیع برنولی به شکل زیر است:

$$f(x) = P^x q^{1-x}; x = 0,1$$

میانگین و واریانس توزیع برنولی برابر است با:

$$\mu_x = E(x) = 0(1-P) + 1 \times P = P$$

$$E(X^2) = 0^2(1-P) + 1^2 \times P = P \rightarrow \sigma_x^2 = P - P^2 = P(1-P) = Pq$$

مثال: تاسی را پرتاب می کنیم اگر متغیر تصادفی x نشان دهنده عدد ۳ باشد آنگاه تابع احتمال و میانگین و واریانس x را بیابید.

حل: x = وقوع عدد ۳

x	0	1
f(x)	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$P(x=0) = \frac{5}{6}$$

$$p(X=1) = \frac{1}{6}$$

$$\mu_X = p = \frac{1}{6} \quad \sigma_X^2 = pq = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

$$F(X) = (\frac{1}{6})^X (\frac{5}{6})^{1-X} \quad X = 0,1$$

۲- **توزیع دو جمله ای:** اگر آزمایش برنولی را در شرایط یکسان و به طور مستقل چند بار تکرار کنیم و نتیجه هر بار آزمایش پیروزی و شکست باشد آنگاه چنین آزمایشی را دو جمله ای گویند که تابع احتمال آن به صورت زیر است:

$$f(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \qquad x=0,1,\dots,n$$

میانگین و واریانس این توزیع به صورت زیر است:

$$\mu_x = np \quad \text{و} \quad \sigma_x^2 = npq$$

مثال: احتمال اینکه تیراندازی تیر خود را به هدف بزند $\frac{3}{4}$ است. با چه احتمالی از ۴ تیر شلیک شده دقیقا دو تیر به هدف می خورد؟

حل:

$$P=\frac{3}{4},\ \ q=\frac{1}{4},\ \ n=4,\ \ x=2$$

$$\rightarrow P(x=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^{4-2}=\frac{27}{128}$$

مثال: در مثال قبل میانگین و واریانس x را بیابید.

حل:

$$\mu_x = np = 4\times\frac{3}{4}=3$$

$$\sigma_x^2 = nPq = 4\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

۳- **توزیع فوق هندسی:** اگر جامعه ای به حجم N را به دو قسمت تقسیم کنیم یک گروه K تایی که دارای مشخصه معینی هستند و یک گروه N-K تایی، حال n عضو از این جمعیت n تایی را بدون جایگذاری انتخاب کنیم، چنین آزمایشی را فوق هندسی گویند.

اگر متغیر تصادفی x به صورت تعداد موفقیتها در n آزمایش غیر مستقل برنولی باشد آن را متغیر تصادفی فوق هندسی گویند. تابع احتمال آن به صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad\qquad x=0,1,2,\ldots,\min(x,n)$$

میانگین و واریانس این توزیع به صورت زیر است:

$$\mu_x=\frac{nk}{N},\ \ \sigma_x^2=\frac{N-n}{N-1}\times\frac{nk}{N}(1-\frac{k}{N})$$

مثال: در انتخاب ۵ قطعه از بین ۴۰ قطعه که ۳ تای آن خراب است، احتمال اینکه یک قطعه انتخاب شده خراب باشد چقدر است.

حل:

$$N=40,\ n=5\ ,\ k=3\ ,\ x=1$$

$$P(X=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{40-3}{5-1}}{\binom{40}{5}}=0.3011$$

۴- **توزیع هندسی:** اگر آزمایش برنولی را در شرایط یکسان و به طور مستقل آنقدر تکرار کنیم تا اولین موفقیت حاصل شود، آنگاه این آزمایش را هندسی گوئیم. تابع احتمال و میانگین و واریانس این توزیع به صورت زیر است:

$$f(x)=Pq^{x-1} \quad x=1,2,\ldots \quad \mu_x=\frac{1}{P}, \quad \sigma_x^2=\frac{q}{P^2}$$

مثال: تاسی را به طور مکرر پرتاب می کنیم. احتمال اینکه اولین عدد۴ در پرتاب ششم ظاهر شود چقدر است.

حل:

$$p = \frac{1}{6} \ , \ q = \frac{5}{6} \ , \ x = 6$$

$$P(X = 6) = \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{6-1} = 0.067$$

۵- **توزیع دو جمله ای منفی:** اگرX تعداد آزمایشات لازم برای رسیدن به r موفقیت باشد ، آنگاه متغیر تصادفیX دو جمله ای منفی است و تابع احتمال و میانگین و واریانس این توزیع به صورت زیر است:

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} \quad , \quad x = r, r+1, \ldots$$

$$\mu_x = \frac{r}{p} \quad , \quad \sigma_x^2 = \frac{rq}{p^2}$$

مثال: سکه ای طوری ساخته شده که احتمال وقوع شیر در آن $\frac{2}{3}$ است. با چه احتمالی چهارمین شیر در پرتاب هفتم ظاهر می شود.

حل:

$$p = \frac{2}{3} \ , \ q = \frac{1}{3} \ , \ r = 4 \ , \ x = 7$$

$$P(x = 7) = \binom{7-1}{4-1}(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^{7-4} = 0.146$$

۶- **توزیع چندجمله ای:** اگر آزمایش برنولی را تعمیم دهیم یعنی نتایج آزمایش یکی از پیشامدهای $A_1, A_2, ..., A_k$ باشد که ناسازگارند (دو به دو اشتراکی ندارند) و این آزمایش با حالتهای مختلف $P_1, P_2, ..., P_k$ بوقوع بپیوندد، آنگاه این آزمایش را چندجمله ای گویند و اگر متغیر تصادفی $X_1, X_2, ..., X_k$ به ترتیب نشان دهنده تعداد نتایج پیشامدهای $A_1, A_2, ..., A_k$ درn آزمایش مستقل باشند آنگاه تابع احتمال این توزیع برابر است با:

$$f(x) = \frac{n!}{x_1! x_2! ... x_k!} {p_1}^{x_1} {p_2}^{x_2} ... {p_k}^{x_k}$$

مثال:از جعبه ای که شامل ۴توپ سفید و ۵توپ قرمز و ۳توپ آبی است، یک توپ به تصادف خارج کرده و پس از مشاهده رنگ آن توپ را به جعبه بر می گردانیم و این آزمایش را ۶مرتبه تکرار می کنیم. احتمال آنرا بیابید که ۳دفعه توپ قرمز و ۲دفعه توپ سفید و ۱دفعه توپ آبی مشاهده شود؟

حل: n=3+2+1=6

$$P_1 = \frac{5}{12} \quad , P_2 = \frac{4}{12} \quad , P_3 = \frac{3}{12}$$

$$P(x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1) = \frac{6!}{3!2!1!} (\frac{5}{12})^3 (\frac{4}{12})^2 (\frac{3}{12})^1 = \frac{625}{5184}$$

۷-**توزیع پواسن:**اگر متوسط تعداد داده ها در فاصله زمانی خاص و یا در ناحیه مکانی خاص باشد و متغییر تصادفی X تعداد رخداد ها باشد آنگاه این آزمایش را پواسن گویند. تابع احتمال این توزیع به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0 \text{و} 1 \text{و} 2 \text{و} ... \qquad \mu_x = \lambda, \quad \sigma_x^2 = \lambda$$

مثال: در یک چهار راه به طور متوسط ۳ تصادف در هفته رخ می دهد. با چه احتمالی در یک هفته معین دقیقا ۵ تصادف رخ می دهد؟

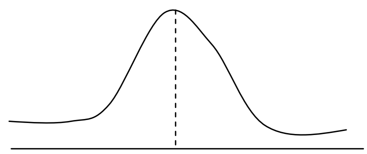
حل:

$$\lambda = 3, x = 5$$

$$f(x) = \frac{e^{-3} \times 3^5}{5!} = 0/1008$$

ب)توزیع های پیوسته

۱-**توزیع نرمال:** متغیر تصادفی X را نرمال گویند هرگاه منحنی توزیع آن به شکل زیر باشد



توزیع احتمال مربوط به این توزیع را نرمال گویند که تابع احتمال آن به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

که در آن $\sigma > 0, \mu \in R, x \in R$

برای محاسبه احتمالات این توزیع ابتدا داریم:

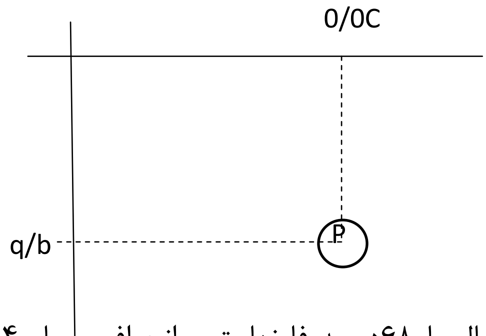
$$1)\ P(a < X < b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}) = P(Z < \frac{b-\mu}{\sigma}) - P(Z < \frac{a-\mu}{\sigma})$$

$$2) P(x < a) = P(Z < \frac{a-\mu}{\sigma})$$

$$3) P(x > a) = 1 - P(Z < \frac{a-\mu}{\sigma})$$

و برای محاسبه آنها از جدول توزیع نرمال استفاده می کنیم که در آن ستون اول مربوط به رقم اول اعشار و سطر اول مربوط به رقم دوم اعشار است. محل برخوردشان احتمال است. مثلا برای

$P(Z < a,bc)$



مثال: میانگین درجه حرارت شهری دارای توزیع نرمال با ۶۸درجه فارنهایت و انحراف معیار ۴درجه فارنهایت است. با چه احتمالی

الف)درجه حرارت بین ۶۵F تا ۷۵F است.

ب)درجه حرارت کمتر از ۷۰F است.

ج)درجه حرارت بیشتر از ۷۰F است.

حل:

$\mu = 68$ و $\sigma = 4$

الف $)P(65 < X < 75) = P(\frac{65-68}{4} < Z < \frac{75-68}{4})$

و طبق جدول توزیع نرمال داریم:

$$= P(-0.75 < Z < 175) = P(Z < 1.75) - P(Z < -0.75) = 0.9599 - 0.2266 = 0.7333$$

ب) $P(X < 70) = P(Z < \frac{70-68}{4}) = P(Z < 0.5) = 0.6915$

ج)$P(X > 70) = 1 - P(X < 70) = 1 - 0/6915 = 0/3085$

تذکر: اگر در توزیع نرمال$\sigma^2=1$, $\mu=0$باشد آنگاه توزیع نرمال را استاندارد گویند. در این توزیع داریم:

$$P(X\le a)=P(Z\le\frac{a-\mu}{\sigma})=P(Z\le\frac{a-0}{1})=P(Z\le a)$$

۲-**توزیع گاما:**متغییر تصادفیX که دارای تابع احتمال به صورت زیر باشد را گاما گویند با پارامترهای β وα

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

که در آن $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$ و α تعداد موفقیت و $\beta=\frac{1}{n}$ است و میانگین و واریانس این توزیع به صورت زیر است:

$$\sigma_x^2=\alpha\beta^2,\mu_x=\alpha\beta$$

مثال: در هر ساعت به طور متوسط ۳۰اتومبیل وارد یک پارکینگ می شود. با چه احتمالی مامور پارکینگ حداقل ۵دقیقه منتظر بماند تا دومین اتومبیل وارد پارکینگ شود؟

حل: $\alpha=2$ و $\to n=\frac{1}{2}\to\beta=\frac{1}{n}=2$ $\qquad \begin{matrix}60 & 30\\ 1 & n\end{matrix}$

$$P(X\ge 5)=\int_5^{\infty}\frac{1}{\Gamma(2)\alpha^2}x^{2-1}e^{-\frac{x}{2}}dx=0/28$$

$$\mu_x=2\times 2=4$$

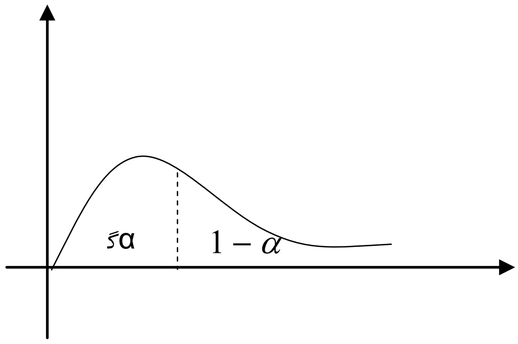
$$\sigma_x^2=2\times 2^2=8$$

۳-**توزیع کای-دو** χ^2: در توزیع گاما $\beta=2$ و $\alpha=\frac{V}{2}$ انتخاب شود آنگاه توزیع گاما تبدیل به توزیعی به نام کای-دو می شود که در آن v را درجه آزادی گویند. تابع احتمال و میانگین و واریانس این توزیع به شکل زیر است:

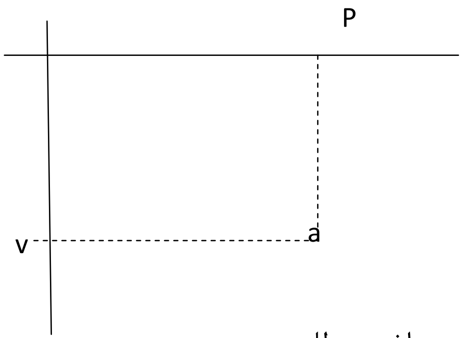
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(\frac{V}{2})2^{\frac{V}{2}}}x^{\frac{V}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$\mu_x=\alpha\beta=\frac{V}{2}\times 2=V$$

$$\sigma_x^2=\alpha\beta^2=\frac{V}{2}\times 2^2=2V$$



برای محاسبه احتمالات توزیع از جدولی به همین نام استفاده می کنیم که در این جدول ستون اول درجات آزادی بوده و سطر اول احتمالات است مثلا $P(X<a)$



مثال: متغیر تصادفی X دارای توزیع χ^2 درجه آزادی ۱۸ می باشد. مطلوبست:

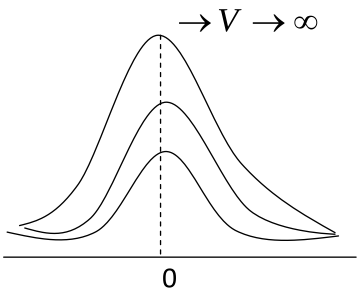
الف) $P(X\leq 7/01)$ ب) $P(X\geq 17/3)$

حل:

الف $)P(X \leq 7/01) = 0/01$

ب$)P(X \geq 17/3) = 1 - P(x \leq 17/3) = 1 - 0/5 = 0/5$

۴- **توزیع t:** اگر x یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد و Y یک متغیر کای-دو با درجه آزادی V باشد و X,Y مستقل باشند، آنگاه متغیر تصادفی $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{v}}}$ دارای توزیع t می باشد که تابع احتمال و میانگین و واریانس آن به شکل زیر است:



$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{V+1}{2})}{\Gamma(\frac{V}{2})\sqrt{\lambda V}}(1+\frac{t^2}{V})^{-\frac{1}{2}(V+1)} \quad ,t \in R$$

$$\mu_t = 0, \quad \sigma_t^2 = \frac{V}{V-2}, V > 2$$

تذکر: هرچه v بیشتر باشد توزیع t به توزیع نرمال نزدیک تر است.

تذکر: برای محاسبه احتمالات توزیع t از جدولی به همین نام استفاده می کنیم که دقیقا مشابه جدول توزیع χ^2 است.

مثال: متغیر تصادفی T دارای توزیع T با درجه آزادی ۱۶ می باشد مطلوبیست :

$$P(T < 1/75) \quad , \quad P(T > 1/34)$$

حل: طبق جدول توزیع t: $P(T < 1/75) = 0/95$

$$P(T > 1/34) = 1 - P(T < 1/34) = 1 - 0/9 = 0/1$$

تذکر:چون توزیع t نسبت به t=0 متقارن است پس:

$$P(t_{\frac{\alpha}{2}} < T < t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

و از طرفی $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ پس

$$P(-t_{1-\frac{\alpha}{2}} < T < t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

۵- **توزیع F**: اگر V,U دو متغیر تصادفی مستقل کای-دو با درجات آزادی v_2,v_1 باشند آنگاه متغیر تصادفی $F = \dfrac{\frac{U}{V_1}}{\frac{V}{V_2}}$ دارای توزیعی به صورت زیر است که به آن توزیع F می گویند.

$$\mathrm{F}(f) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{v_1+v_2}{2})(\frac{v_1}{v_2})^{\frac{v_1}{2}}}{\Gamma(\frac{v_1}{2})\Gamma(\frac{v_2}{2})} \times \dfrac{f^{\frac{v_1}{2}-1}}{(1+\frac{v_1 f}{v_2})^{\frac{1}{2}(v_1+v_2)}} & \mathrm{f} > 0 \\ 0 & f \leq 0 \end{cases}$$

در این توزیع دو درجه آزادی v_2,v_1 داریم و برای محاسبه احتمالات از جدول توزیع F استفاده می کنیم. در این توزیع داریم:

$$\mu_f = \frac{v_2}{v_2-2}, v_2 > 2$$

$$\sigma_f^2 = \frac{2v_2^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-4)(v_2-2)^2}, v_2 > 4$$

تذکر: داریم:

$$f_{1-\alpha}(v_1,v_2) = \frac{1}{f_\alpha(v_2,v_1)}$$

مثال: با استفاده از جدول توزیع F مقادیر زیر را بیابید.

الف) $f_{0/95}(15,6)$ ب) $f_{0/95}(,15)$

ج) $f_{0/05}(15,6)$ د) $f_{0/05}(6,15)$

حل: طبق جدول

الف) $f_{0/95}(15,6)=3/94$

ب) $f_{0/95}(6,15)=2/79$

ج) $f_{0/05}(15,6)=\dfrac{1}{f_{0/95}(6,15)}=\dfrac{1}{2/79}$

د) $f_{0/05}(6,15)=\dfrac{1}{f_{0/95}(15,6)}=\dfrac{1}{3/94}$

مثال: مقادیر a,b را طوری بیابید که داشته باشیم:

الف) $P(F(24,30)<b)=0/95$ ب) $P(F(24,30)>a)=0/05$

حل: $v_1=24,72=30 \xrightarrow{\text{ازجدول}}$

الف) $P(F(24,30)<b)=0/95 \rightarrow b=1/89$

ب) $P(F(24,30)>a)=1-P(F(24,30)<a)=0/05$

$\rightarrow P(F(24,30)<a)=0/95 \rightarrow a=1/89$

تذکر: برای توزیع F می توان نوشت:

$$P(f_{\frac{\alpha}{2}}<v_1,v_2)<F<f_{1-\frac{\alpha}{2}}(v_1,v_2))=1-\alpha$$

مثال های فصل پنجم

۱- تاسی را پرتاب می کنیم اگر متغیر تصادفی x نشان دهنده عدد ۴ باشد آنگاه تابع احتمال و میانگین و واریانس x را بیابید.

حل:

$$f(x)=(\frac{1}{6})^{x}(\frac{5}{6})^{1-x} \quad x=0,1$$

$$\mu_x = P = \frac{1}{6}$$

$$\sigma_x^2 = Pq = \frac{1}{6}\times\frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

۲- یک تست دارای ۱۵ سئوال ۴ گزینه ای بوده که تنها یک گزینه آن صحیح است. با چه احتمالی شخصی که تصادفی همه سئوالات را پاسخ دهد به ۱۰ سوال درست جواب می دهد؟

حل:

$$P=\frac{1}{4}, q=\frac{3}{4}, n=15, x=10$$

$$P(x=10)=\binom{15}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{15-10}=0/00003$$

۳- شخصی با احتمال ۰/۷ به هر سوال درست پاسخ می دهد. در یک امتحان با ۱۰ سوال احتمال اینکه این شخص به بیش از ۸ سئوال جواب درست دهد چقدر است؟

حل: $P=0/7, \quad q=0/3, \quad n=10, \quad x>8$

$$P(X>8)=P(X=9)+P(X=10)=\binom{10}{9}(0/7)^{9}(0/3)^{10-9}+\binom{10}{10}(0/7)^{10}(0/3)^{0}=0/149$$

۴- از ۱۲ نفر متقاضی استخدام تنها ۴ نفر قادر به انجام آن کار هستند در یک نمونه ۲ تایی از این افراد احتمال اینکه هیچ کدام قادر به انجام کار نباشند را بیابید؟

حل:

$$N=12,\ \ K=4,\ \ n=2,\ \ x=0$$

$$P(x=0)=\frac{\binom{4}{0}\binom{12-4}{2}}{\binom{12}{2}}=\frac{14}{33}$$

۵- احتمال اصابت موشک به یک جنگنده ۰/۳۵ می باشد با چه احتمالی چهارمین موشک به جنگنده برخورد می کند.

حل: $x=4$ $\qquad q=0/65$ $\qquad P=0/35$

$$P(x=4)=(0/35)(0/65)^{4-1}=0/096$$

۶- احتمال اینکه در پرتاب متوالی یک سکه ، سومین شیر در هفتمین آزمایش به دست آید چقدر است؟

حل: $P=\frac{1}{2},\ \ q=\frac{1}{2},\ \ x=7,\ \ r=3$

$$P(x=7)=\binom{7-1}{3-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{7-3}=0/1172$$

۷- یک ۶ وجهی که سطح آن آبی و ۳ سطح آن قرمز است را ۷ بار پرتاب می کنیم با چه احتمالی ۲ بار آبی و ۴ بار قرمز ظاهر می شود.

حل:

$$P_1=\frac{2}{6},\quad P_2=\frac{3}{6},\quad P_3=\frac{1}{6} \qquad\qquad n=2+4+1=7$$

$$P(x_1=2,x_2=4,x_3=1)=\frac{7!}{2!4!1!}\times(\frac{2}{6})^3(\frac{3}{6})^4(\frac{1}{6})^1$$

۸- یک ماشین نویس به طور متوسط ۲ غلط در هر صفحه تایپ می کند. احتمال اینکه او در صفحه بعدی حداقل یک تایپ غلط داشته باشد را بیابید.

حل: $\lambda=2$ و $x\geq 1$

$$P(x\geq 1)=1-P(X=0)=1-\frac{e^{-2}\times 2^0}{01}=0/864$$

۹- طول عمر یک لامپ دارای توزیع نرمال با $\mu=2$ و $\sigma=0/3$ است. با چه احتمالی این لامپ عمر کمتر از ۲/۳ سال دارد؟

حل:

$$P(X<2/3)=P(Z<\frac{2/3-2}{0/3})=P(Z<1)=0/8413$$

۱۰- متغیر تصادفی x دارای توزیع نرمال با $\mu=25$ و $\sigma=6$ است. مقدار C را طوری بیابید که:

$$P(|X-25|\leq C)=0/9544$$

حل:

$$P(|X-25|\leq C)=P(-C\leq X-25\leq C)$$

$$=P(-\frac{C}{6}\leq\frac{X-25}{6}\leq\frac{C}{6})=P(-\frac{C}{6}\leq Z\leq\frac{C}{6})=0/9544$$

$$\Rightarrow P(Z \le \frac{C}{6}) - P(Z < -\frac{C}{6}) = 0/9544$$

$$\Rightarrow P(Z \le \frac{C}{6}) - (1 - P(Z < \frac{C}{6}) = 0/9544$$

$$\rightarrow P(Z \le \frac{C}{6}) = 0/9772 \xrightarrow{\text{از جدول}} \frac{C}{6} = 2 \Rightarrow C = 12$$

۱۱- به طور متوسط در هر ساعت ۲۰ مشتری وارد یک بانک می شود. احتمال اینکه بیشتر از ۷ دقیقه طول بکشد تا سومین مشتری وارد بانک شود چقدر است؟

حل: $\rightarrow n = \frac{1}{3} \rightarrow \begin{matrix} 60 & 20 \\ 1 & n \end{matrix} \beta = \frac{1}{n}$ و $\propto = 3$

$$dx = 0.183X^{3-1} e^{-\frac{x}{3}} P(x \ge 7) = \int_7^{\infty} \frac{1}{(2)!\,3^3}$$

۱۲- متغیر تصادفی T دارای توزیع t با درجه آزادی ۲۴ می باشد. مقدار t را در حالتهای زیر حساب کنید.

الف) $P(T < t) = 0/95$ ب) $P(T < t) = 0/99$ ج) $P(T > t) = 0/025$

حل: الف) $P(T < t) = 0/95 \xrightarrow{\text{از جدول}} t = 1/71$

ب) $P(T < t) = 0/99 \rightarrow t = 2/49$

ج) $1 - P(T < t)\ 0/025 \rightarrow P(T < t) = 0/975 \rightarrow t = 2/06 \quad \rightarrow P(T > t) = 0/025$

۱۳- طبق توزیع F مطلوبست $P(F(5,3) \ge 9/01)$

حل: $P(F(5,3) \ge 9/01) = 1 - P(F(5,3) \le 9/01) = 1 - 0/95 = 0/05$